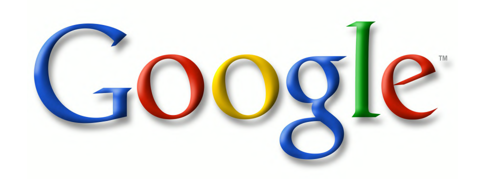
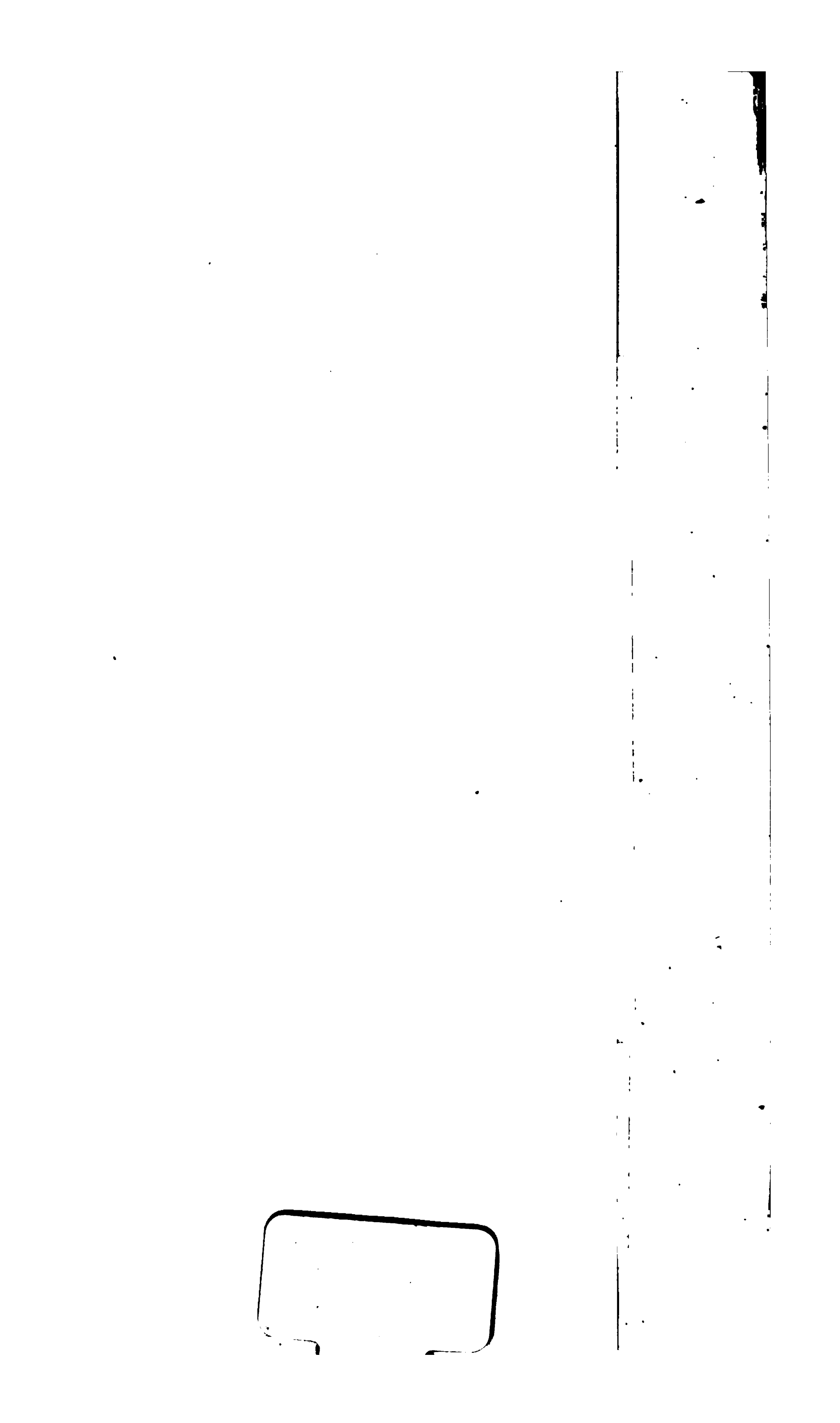




FORMULES

ET

TABLES NOUVELLES

POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES

Relatifs aux

EAUX COURANTES.

AVEC DIVERSES APPLICATIONS PRATIQUES, TELLES QUE LA PROMPTE DÉTERMINATION

DES DIMENSIONS DE TOUS LES CANAUX
OU TUYAUX CAPABLES D'UN DÉBIT DONNÉ SOUS UNE PENTE DONNÉE;
ET DES REMOUS OU GONFLEMENTS QUI SE PRODUISENT A UNE DISTANCE QUELCONQUE
EN AMONT DES BARRAGES

PAR

M. DE SAINT-VENANT

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
professeur de génie rural à l'Institut national agronomique, membre de la Société philomathique de Paris
correspondant de la Société d'agriculture de Loir-et-Cher

Prix : 3 fr.

A PARIS
CHEZ CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT
LIBRAIRES DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES
Quai des Augustins, 49
L. MATHIAS (AUGUSTIN), QUAI MALAQUAIS.

1851

INDICATION DES TABLES NUMÉRIQUES USUELLES.

(Voir la table des matières à la fin du volume.)

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cie,
26, rue Racine.

(EXTRAIT DES ANNALES DES MINES, 4e SÉRIE, T. XX, P. 183.)

MÉMOIRE

Sur des formules et des tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes;

Par M. DE SAINT-VENANT.

CHAPITRE PREMIER.

COMMENT ON PEUT RÉDUIRE A UN SEUL TERME L'EXPRESSION EMPIRIQUE DE LA RÉSISTANCE DES PAROIS DES CANAUX OU DES TUYAUX DE CONDUITE, EN FONCTION DE LA VITESSE MOYENNE DE L'EAU QUI Y COULE.

1. *Altération que l'on fait souvent subir à la formule de Prony.*

Dans les applications pratiques variées que l'on est dans le cas de faire de l'équation du mouvement uniforme des eaux dans les canaux découverts ou dans les tuyaux, due à Prony :

(1) $$\frac{\omega}{\chi}I \quad \text{ou} \quad RI = aU + bU^2$$

(où I est la *pente par mètre*, U la vitesse moyenne, R le quotient de la section transversale constante ω par son périmètre mouillé χ, a et b deux nombres), on éprouve souvent une grande gêne, tenant à ce que le second membre, qui représente empiriquement la petite hauteur du prisme fluide dont

le poids donne l'intensité du frottement sur une surface de parois égale à celle de sa base (*), se trouve composé de deux termes, et de ce que, par suite, la valeur de U que l'on en tire contient un radical recouvrant un binôme, avec un terme numérique hors du radical.

Aussi, et surtout pour certains problèmes implicites où l'on ne pourrait suppléer à la formule par des tables numériques sans être entraîné dans des tâtonnements réitérés (**), presque tous les hydrauliciens prennent le parti d'effacer le premier terme aU (***) et d'écrire :

(*) En effet, soient h cette petite hauteur, Π le poids de l'unité du volume du fluide, on a Πh pour le frottement de l'unité superficielle des parois, et $\Pi h . L\chi$ pour la force retardatrice d'une portion du courant d'eau d'une longueur L. Comme elle doit, pour l'uniformité du mouvement, être égale à la force accélératrice provenant du poids décomposé $\Pi . L\omega . I$, on a bien $\frac{\omega}{\chi} I = h$.

(**) Voyez au chap. 4 ci-après, art. 22 à 40.

(***) Prony, Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes, art. 186. — Genieys, Essai sur l'art de conduire les eaux, etc. — D'Aubuisson, Traité d'hydraulique à l'usage des ingénieurs, n°s 115, 187. — M. Nadault de Buffon, Traité des irrigations, t. II, p. 220; citation d'une formule employée par des hydrauliciens italiens. — M. Eytelwein, Recherches sur le mouvement de l'eau, etc. Académie de Berlin, 1814 et 1815. Traduit et inséré aux Annales des mines, t. XI, 1825, §§ XII et XV. — M. Dupuit, Etudes sur le mouvement des eaux courantes, 1848, n°s 54, 56, 59, etc. — M. Courtois, Traité des moteurs, 2e partie ou t. II, moteurs inanimés, 1850, art. 99, etc. Cet auteur atténue, comme M. Eytelwein, l'inexactitude due à la suppression du premier terme en donnant au coefficient b du second une valeur nouvelle. Presque tout son livre est fondé sur cette réduction de la formule à la forme (2), qu'il ne croit pas empirique.

(2) $$RI = bU^2,$$

ce qui diminue pourtant d'une manière sensible la valeur du produit RI; car, par exemple, pour U égal à un demi-mètre, cette valeur se trouve ainsi réduite de plus d'un cinquième dans les canaux découverts, et d'environ un dixième dans les tuyaux de conduite d'après les grandeurs que Prony attribue aux coefficients a et b pour ces deux cas.

2. *Autre formule.*

Il m'a paru depuis longtemps, et j'ai avancé en 1843 dans un mémoire (*), qu'il y avait un moyen facile d'atteindre le même but, ou de donner une forme monôme à l'expression, soit de RI en U, soit de U en RI, sans altérer ainsi leurs valeurs.

C'est d'affecter la vitesse U, dans l'expression de RI, d'un exposant fractionnaire intermédiaire entre 2 et 1, c'est-à-dire de poser

(3) $$RI = cU^m,$$

m étant un peu au-dessous de 2.

Pour déterminer les valeurs de l'exposant m et du coefficient c, les plus propres à représenter les expériences, en compensant autant que possible leurs anomalies, on pourrait, comme a fait Prony pour les coefficients a et b de sa formule binôme, construire sur une feuille de dessin la suite des points ayant pour abscisses les valeurs observées

(*) Sur un mode d'interpolation applicable aux questions relatives au mouvement des eaux et suppléant à l'intégration souvent impossible des équations aux dérivées partielles. (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. XVII, p. 1108; à l'art. 9, p. 1114.)

de U, et pour ordonnées les valeurs correspondantes soit de RI, soit de $\frac{RI}{U}$, puis chercher par tâtonnement quelle est la parabole de degré fractionnaire qui se rapproche le plus de ces points.

Mais la recherche peut être réduite à celle d'une ligne droite, déterminable par le calcul au moyen de méthodes connues, si l'on prend les logarithmes des deux membres de $RI = cU^m$. On obtient en effet l'équation

$$(4) \qquad \log(RI) = \log c + m \log U,$$

qui donne bien une ligne droite pour la suite des points dont les abscisses et les ordonnées sont les valeurs de log U et de log (RI) qui y satisfont.

Les erreurs inséparables des observations s'opposent à ce que les points déterminés par les valeurs de ces deux logarithmes fournies par les expériences soient exactement en ligne droite, même en admettant que les équations (3) et (4) expriment bien la vraie loi du phénomène. Mais on remarque (*), d'après la direction générale et sensiblement rectiligne de la zone comprenant l'ensemble des points construits de cette manière, que l'on peut tracer diverses droites s'écartant moins d'eux qu'ils ne s'écartent les uns des autres, lorsque l'on considère ceux répondant à des abscisses ou à des ordonnées à peu près égales pour plusieurs expériences. Les distances entre les points et chaque droite, mesurées dans le sens des coordonnées, sont donc comprises dans les limites des erreurs des observations, et l'on peut

(*) Voyez *fig.* 1 et 3.

les regarder comme représentant plus ou moins bien la loi inconnue.

On conçoit que parmi ces droites il y en a une qui est préférable à toute autre, sous le rapport de sa proximité des divers points et de la correction mutuelle qu'elle fait des erreurs probables des observations qui les ont données. Si l'on parvient à la construire, la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe des *log* U donnera la valeur à prendre pour l'exposant m, et son ordonnée répondant à l'abscisse log U=o donnera la valeur à attribuer au logarithme du coefficient cherché c.

3. *Méthodes de représentation et de correction d'anomalies; ce qui arrive lorsqu'on prend d'abord les logarithmes.*

Les géomètres ont imaginé diverses manières de définir mathématiquement une pareille droite, ou diverses méthodes de détermination numérique des coefficients p et m de son équation, de la forme de (4) :

(5) $$y = p + mx,$$

pour qu'elle exprime le plus probablement et le plus approximativement la loi d'un phénomène dont l'observation plus ou moins exacte, plus ou moins affectée d'erreurs inconnues, a fourni un nombre quelconque, plus grand que 2, de valeurs de x, et de valeurs correspondantes de y.

Avant de faire usage de ces méthodes pour notre question, il est nécessaire d'en montrer l'esprit général, et d'apprécier surtout l'influence que peut avoir leur application, faite non pas aux nombres mêmes fournis directement par l'expérience, mais *aux logarithmes de ces nombres*.

Pour cela, supposons généralement qu'il faille représenter par une ligne quelconque, droite ou courbe ou par son équation

$$(6) \qquad y = f(x),$$

dont la forme est connue, et les paramètres à trouver, la loi du phénomène pour lequel il a été fait un nombre n d'expériences ayant fourni une suite de valeur de la variable x

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; x_n$$

et de valeurs correspondantes de celle y

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; y_n,$$

ou ayant fourni, si l'on veut, n points construits avec les coordonnées x_1 et y_1, x_2 et y_2,.... et dont chacun exprime ainsi, graphiquement une expérience.

Si en écrivant ainsi

$$(7) \qquad y - f(x) = 0,$$

l'équation (6), dont nous supposons pour un moment que les paramètres sont déjà déterminés, on met successivement pour x et y, dans son premier membre, les valeurs particulières données par les expériences, les résultats qu'on obtient :

$$(8) \qquad y_1 - f(x_1), \quad y_2 - f(x_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; y_n - f(x_n)$$

ne sont pas exactement égaux à zéro, pour trois raisons : 1° l'erreur de l'observation sur l'y; 2° l'erreur de l'observation sur l'x; 3° l'erreur même de la forme de la fonction $f(x)$, qui n'exprime généralement qu'*à peu près* la loi inconnue du phénomène.

Nous appelons *écarts sur y* les valeurs, posi-

tives ou négatives, de ces résultats $y_1 - f(x_1)$, etc., des substitutions, ou les erreurs que l'on commettrait en posant les équations incorrectes $y_1 - f(x_1) = 0$, $y_2 - f(x_2) = 0$, etc.

Ces écarts sont, comme l'on voit, les différences entre chaque valeur de y *observée* et la valeur *calculée* par la formule $y = f(x)$, pour l'x observé correspondant. Chaque écart est ainsi l'excès de l'ordonnée de l'un des points $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$... sur l'ordonnée de la ligne $y = f(x)$, ayant même abscisse x. C'est, si l'on veut, la distance de chaque point à la ligne, en mesurant cette distance parallèlement aux ordonnées. Il ne faut pas confondre cet écart avec l'*erreur d'observation sur* y, comme on le fait quelquefois, dans des questions, il est vrai, qui appartiennent à la physique *céleste*, et où il n'y a guère d'erreur, ni sur l'observation de la variable principale x, qui est alors le temps, ni sur la forme de la fonction $f(x)$.

Supposons maintenant que pour rendre plus facile la détermination des paramètres on prenne les logarithmes des deux membres de l'équation (6), ou qu'on la remplace par

$$(9) \qquad \log y = \log f(x).$$

Appelons ε_1, ε_2... les écarts sur y, et prenons aussi les logarithmes des deux membres des égalités

$$(10) \qquad y_1 - \varepsilon_1 = f(x_1), \quad y_2 - \varepsilon_2 = f(x_2), \quad \text{etc.}$$

Comme ε_1 est supposé très-petit par rapport à y_1 on a, en considérant $-\varepsilon_1$ comme une différentielle de y_1, et en supposant un moment que les logarithmes sont hyperboliques,

$$\log (y_1 - \varepsilon_1) = \log y_1 + \frac{-\varepsilon_1}{y_1}.$$

On a donc, en faisant de même pour les autres équations (10), ces n égalités :

$$\log y_1 - \log f(x_1) = \frac{\varepsilon_1}{y_1}, \quad \log y_2 - \log f(x_2) = \frac{\varepsilon_2}{y_2}, \quad \text{etc.}$$

Les premiers membres sont les écarts sur $\log y$. Ils sont égaux, comme l'on voit, à $\frac{\varepsilon_1}{y_1}$, $\frac{\varepsilon_2}{y_2}$ ... c'est-à-dire aux *écarts sur* y *divisés par les valeurs correspondantes de* y *fournies par les expériences.*

L'esprit des méthodes de calcul des paramètres inconnus d'équations dont la forme seule est donnée, est d'atténuer le plus possible les *écarts* en les corrigeant et les compensant les uns par les autres, comme nous verrons à l'article suivant.

Appliquées à des équations logarithmiques telles que $\log y = \log f(x)$, ces méthodes atténueront donc ou compenseront *les quotients* $\frac{\varepsilon}{y}$ *des écarts sur les variables* y *par les valeurs observées de ces variables*, c'est-à-dire atténueront et compenseront ce qu'on appelle les *écarts proportionnels* sur les y.

Or c'est là un but désirable suivant les auteurs qui ont traité la question des eaux courantes. Prony observe (*) qu'une anomalie 0,1 sur 1 donne lieu à une erreur dix fois plus grande que la même anomalie 0,1 sur 10, et que ce sont les *différences proportionnelles* entre les nombres observés et les nombres calculés qu'il est impor-

(*) Recherches physico-mathématiques, art. 169 et 170.

tant d'atténuer, plutôt que les différences absolues.

M. Eytelwein exprime la même opinion (*), et l'on verra, à une note de l'article suivant, à quel expédient singulier il a recours pour atteindre partiellement ce but.

Nous pouvons donc hardiment appliquer les méthodes de détermination des paramètres à l'équation (4) de l'art. 2, obtenue en prenant les logarithmes des deux membres de celle (3) $RI = cU^m$, que nous voulons établir, au lieu d'opérer directement sur celle-ci.

Nous allons rappeler maintenant en quoi consistent les trois principales de ces méthodes, qui sont celle de Laplace, celle de Legendre et celle de M. Cauchy. Nous supposerons que l'équation dont il faut déterminer les paramètres p et m est

$$y = p + mx,$$

y représentant soit une quantité observée, *soit son logarithme*, et x une autre quantité observée, ou une fonction quelconque de cette quantité.

4. *Méthode de Laplace.*

La première méthode que nous considérerons sera celle de Laplace. Elle consiste à imposer pour condition aux deux coefficients cherchés p et m, *de rendre nulle la somme algébrique des écarts* $y_1 - p - mx_1$, $y_2 - p - mx_2$, etc., et *de rendre un minimum leur somme arithmétique;* en sorte que la somme des écarts en plus égale la somme des écarts en moins, et que chacune de ces deux

(*) Recherches sur le mouvement de l'eau (déjà cité), § 1. Annales des mines, t. XI, p. 458.

sommes numériquement égales soit la plus petite possible (*).

Toute droite passant par le centre de gravité des points $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$... *remplit la première de ces deux conditions;* car si l'on désigne par le signe Σ la somme des quantités de même nom, déduites des n observations, cette condition est exprimée par l'égalité

$$\Sigma(y - p - mx) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\frac{1}{n}\Sigma y = p + m \cdot \frac{1}{n}\Sigma x, \tag{11}$$

(*) Mécanique céleste, 1re part., liv. 3, art. 40; et Recherches physico-mathématiques de Prony, introduction, p. XVIII.

La méthode dont nous parlons est la *seconde* des deux que donne Laplace à propos de la détermination de la figure de la terre. Nous écartons, à dessein, une première méthode qu'il donne au numéro précédent de la Mécanique céleste, et qu'il reproduit, en la préconisant, à la Théorie analytique des probabilités (liv. 2, chap. 3, n° 24). Elle consiste à *atténuer le plus possible le plus grand écart.* M. de Prony, qui l'a employée sans trop s'y arrêter (Introduction, p. XVIII), montre qu'elle se réduit géométriquement à circonscrire les n points $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$... par les deux droites parallèles les moins éloignées l'une de l'autre, et à prendre, pour la droite cherchée, celle qui est également distante de toutes deux; ce qui rend égaux entre eux, au signe près, les trois plus grands écarts.

Cette méthode, que Fourier a traitée aussi en y appliquant la théorie des inégalités (Mémoires de l'Institut, partie historique, t. VI) peut très-bien convenir dans des questions d'un autre genre que la nôtre; par exemple, lorsqu'il s'agit de remplacer, entre certaines limites, l'expression certainement exacte, mais compliquée d'une fonction, par une expression certainement inexacte, mais plus simple et suffisamment approchée pour les applica-

qui montre bien que le centre de gravité, dont les coordonnées sont

$$\frac{1}{n}\Sigma x, \quad \frac{1}{n}\Sigma y,$$

se trouve sur la droite $y = p + mx$.

Si maintenant l'on transporte à ce centre l'origine des coordonnées, et si l'on appelle ξ et η les deux coordonnées nouvelles, ou si l'on fait

$$(12) \qquad \xi = x - \frac{1}{n}\Sigma x, \quad \eta = y - \frac{1}{n}\Sigma y$$

l'équation de la droite, en en retranchant celle (11) pour éliminer p, devient

$$(13) \qquad \eta = m\xi.$$

On prouve facilement que l'on satisfait à la *seconde condition* de Laplace en rangeant les

tions. M. Poncelet en a fait un usage élégant et fort utile en mécanique pour remplacer approximativement un radical $\sqrt{u^2 + v^2}$ par une expression rationnelle $au + bv$ ne s'écartant pas de plus de 1/6 de sa valeur, quand u et v ont un rapport quelconque, et de 1/25 quand on sait que $u > v$. C'est une opération du même genre que si l'on remplaçait un arc de cercle par une droite parallèle à sa corde, menée par le milieu de sa flèche.

Mais ici notre but est en quelque sorte inverse. Nous voulons, de données inexactes, déduire le résultat le plus exact possible par la compensation de leurs erreurs. La méthode Laplace dont nous parlons ici ne tire ce résultat que des données qui s'en écartent le plus et qui sont fournies par les trois expériences les plus anormales, les moins d'accord avec l'ensemble des autres, c'est-à-dire par les expériences probablement les plus mal faites, et qu'ordinairement il conviendrait de rejeter au lieu de s'en servir à l'exclusion des autres. Elle ne saurait donc nous convenir.

nouvelles abscisses ξ des points, fournies par les expériences, suivant l'ordre de grandeur des quotients $\frac{\eta}{\xi}$ décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, et puis, en prenant, si $\xi', \xi'' \ldots \xi^{(r-1)}, \xi^{(r)} \ldots\ldots \xi^{(n)}$ sont les grandeurs des abscisses ainsi rangées :

$$b = \frac{\eta^{(r)}}{\xi^{(r)}},$$

$\frac{\eta^{(r)}}{\xi^{(r)}}$ étant le rapport $\frac{\eta}{\xi}$ correspondant à l'abscisse $\xi^{(r)}$ pour laquelle on a

$$\xi' + \xi'' + \ldots + \xi^{(r-1)} < \xi^{(r)} + \ldots\ldots + \xi^{(n)},$$

et

$$\xi' + \xi'' + \ldots\ldots + \xi^{(r)} > \xi^{(r-1)} + \ldots\ldots + \xi^{(n)},$$

c'est-à-dire à l'abscisse $\xi^{(r)}$ dont la valeur absolue, ajoutée à la somme $\xi' + \ldots\ldots + \xi^{(r-1)}$ de celles des abscisses précédentes, la fait dépasser la moitié de la somme totale $\xi' + \xi'' + \ldots + \xi^{(n)}$ des valeurs absolues des abscisses.

C'est cette méthode, appliquée à $\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{U}} = a + b\mathrm{U}$, qui a fourni à Prony et à M. Eytelwein les valeurs des coefficients a et b de leurs formules binômes (*).

(*) Pour mieux dire, elle a donné à Prony, en l'appliquant aux trente et une expériences dont il a fait usage pour les canaux :

$$a = 0{,}000040025, \quad b = 0{,}0003129.$$

Et en l'appliquant aux cinquante et une expériences des tuyaux :

$$a = 0{,}000020709, \quad b = 0{,}00035369.$$

(Recherches, introduction, p. xxvj et xxvij ; g étant

= 9,809). Mais, au lieu de ces quatre nombres, il a adopté ceux 0,0000444499 ; 0,0003093l4 ; 0,0000173314 et 0,0003482590, à la suite de considérations et de l'emploi de divers moyens dont il ne donne pas le détail, et qui portent principalement, dit-il (Recherches, introduction, p. xxxi), *sur la nécessité de rendre en général les valeurs absolues des anomalies d'autant moindres que les vitesses elles-mêmes étaient plus petites* (c'est-à-dire de compenser les erreurs *proportionnelles*), et sur la plus grande réduction dont pouvaient être susceptibles les anomalies des expériences qu'il savait, par des renseignements particuliers, mériter plus de confiance que les autres.

Quant à M. Eytelwein, au lieu d'altérer finalement les résultats numériques fournis par la méthode Laplace, il altère cette méthode elle-même en faisant passer la ligne droite représentée par $\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{U}} = a + b\mathrm{U}$, non pas par le centre de gravité général des points dont les abcisses sont U et les ordonnées $\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{U}}$, mais par le centre de gravité de ceux fournis par quelques-unes des expériences où les vitesses ont été les plus petites. Il prend pour cela (Mémoire cité, § x, p. 458 et § xiv, p. 451) les *dix premières* des quatre-vingt-dix-neuf expériences relatives aux canaux, et les *deux premières* seulement des cinquante et une expériences relatives aux tuyaux. Il en donne pour raison qu'il convient de faire en sorte *que les déviations* (ou écarts) *de la vitesse calculée ne soient qu'une très-petite partie de la vitesse observée.*

Il me semble que ce privilége qu'il accorde à un très-petit nombre d'expériences où les vitesses ont été les moindres n'atteint point d'une manière rationnelle son but qui est, comme l'on voit, d'atténuer les *écarts proportionnels* au lieu des écarts absolus. Il conviendrait plutôt, si l'on veut atténuer les écarts proportionnels sur RI, ou les valeurs diverses que prend le quotient $\frac{\mathrm{RI} - a\mathrm{U} - b\mathrm{U}^2}{\mathrm{RI}}$ pour les valeurs de RI et U données par

les expériences, d'appliquer la méthode Laplace, *sans altération*, à l'équation

$$(a)\qquad 1 = a\frac{U}{RI} + b\frac{U^2}{RI}.$$

M. Belanger a proposé dans son cours lithographié d'hydraulique à l'École centrale, n° 52, quelque chose de semblable pour la formule des tuyaux, en employant la méthode des moindres carrés.

Si ce sont les écarts proportionnels sur U que l'on veut atténuer et compenser (voyez art. 9), on a, en appelant ε_1, ε_2, les écarts absolus :

$$R_1I_1 = a(U_1 - \varepsilon_1) + b(U_1 - \varepsilon_1)^2,\quad R_2I_2 = \text{etc.}$$

Dévelôppant la première de ces équations, négligeant le carré de ε_1, et divisant par $U_1\left(\frac{a}{2b} + U_1\right)$, elle prend la forme

$$(b)\qquad \frac{R_1I_1}{U_1\left(U_1 + \frac{a}{2b}\right)} - \frac{a}{U_1 + \frac{a}{2b}} - \frac{bU_1}{U_1 + \frac{a}{2b}} = -\frac{\varepsilon_1}{U_1}.$$

$\frac{a}{2b}$ peut être négligé devant U_1 pour presque toutes les expériences faites, car en prenant pour première approximation les valeurs de a et de b de M. Eytelwein, on a $\frac{a}{2b} = 0^m,066$. Le premier membre de cette égalité se réduit donc à $\frac{R_1I_1}{U_1^2} - b - a\frac{1}{U_1}$. D'où il suit que pour déterminer a et b par la méthode Laplace, de manière à atténuer les *écarts proportionnels* sur U, qui sont $\frac{\varepsilon_1}{U_1}, \frac{\varepsilon_2}{U_2}\ldots$ il faudrait appliquer cette méthode, non plus à $\frac{RI}{U} = a + bU$, comme a fait Prony, ce qui atténue plutôt les *écarts absolus* $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ldots.$, mais à

$$(c)\qquad \frac{RI}{U^2} = b + a\frac{1}{U}.$$

5. *Méthode de Legendre.*

La seconde méthode dont nous nous servirons est celle de Legendre, dite des moindres carrés(*), trouvée en même temps par M. Gauss (**), et consistant, comme l'on sait, à rendre un minimum la somme $\Sigma(y-p-mx)^2$ des carrés des écarts.

Quand $p=0$, ou quand l'équation se réduit à $y=mx$, elle donne, en égalant à zéro la différentielle de $\Sigma(y-mx)^2$ par rapport à m :

$$m=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}.$$

Lorsque le second membre est complet $=p+mx$, des différentiations analogues par rapport à p et à m donnent, pour éliminer p :

$$p=\frac{1}{n}\Sigma y-m.\frac{1}{n}\Sigma x,$$

et, pour déterminer m, une expression qui, en faisant comme précédemment

$$\xi=x-\frac{1}{n}\Sigma x,\quad \eta=y-\frac{1}{n}\Sigma y,$$

revient à

$$m=\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}. \tag{14}$$

En sorte que, comme par la méthode Laplace, la droite cherchée passe par le centre de gravité

(*) Nouvelles méthodes pour déterminer les orbites des comètes.

(**) Laplace, Probabilités, ch. IV, art. 24, et 1er supplément.

de tous les points $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$...., et, de plus, la tangente de l'angle qu'elle forme avec l'axe des x est la même que si, après avoir transporté l'origine à ce centre, on traitait l'équation

$$\eta = m\xi,$$

qui en résulte, par la même méthode des moindres carrés, comme nous venons de faire de celle $y = mx$.

On sait que Laplace, en comparant entre elles, par le calcul des probabilités, les valeurs du coefficient m susceptibles d'être tirées des diverses combinaisons *linéaires* des équations particulières $y_1 - mx_1 = 0$, $y_2 - mx_2 = 0$.... vraies seulement à cela près des écarts sur y, a trouvé que la valeur $m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ satisfaisant au minimum de $\Sigma(y - mx)^2$ était celle qui se trouvait affectée de *la moindre erreur moyenne à craindre*, en appelant ainsi la somme des erreurs possibles provenant des écarts sur y, multipliées respectivement par les probabilités de les commettre.

Aussi cette méthode, applicable du reste à un nombre quelconque de coefficients, est-elle préconisée comme la meilleure, et employée jusqu'à l'abus et d'une manière aveugle et sans discernement par certains astronomes ou physiciens, en Allemagne surtout. Ils ne font pas attention que l'analyse justificatrice de Laplace repose sur quelques suppositions qui ne se réalisent jamais exactement.

Prony se proposait de l'employer dans une nouvelle édition de ses Recherches sur les eaux courantes. Nous l'emploierons également, mais sans négliger d'employer comparativement les deux autres.

6. *Méthode de M. Cauchy. A quoi elle revient géométriquement.*

Enfin M. Cauchy a donné une troisième méthode (*) simple, très-expéditive, qui a été adoptée d'autant plus volontiers par les astronomes et les physiciens, qu'applicable comme celle de Legendre à un nombre quelconque de termes d'une expression $pf(x)+m\varphi(x)+q\psi(x)+$ etc., de y; elle indique d'elle-même le moment où il convient de cesser d'en ajouter pour représenter l'ensemble des expériences sans arriver à représenter jusqu'à leurs anomalies.

Elle consiste, dans le cas particulier de notre équation $y=p+mx$, à éliminer d'abord (comme dans les deux autres méthodes dont nous venons de parler) le terme constant p au moyen de l'équation-somme

$$\Sigma y = np + m\Sigma x$$

résultant de ce qu'on suppose nulle la somme algébrique des écarts, puis à appliquer à l'équation provenant de cette élimination et qui est, en faisant toujours $x-\frac{\Sigma x}{u}=\xi$, $y-\frac{\Sigma y}{u}=\eta$:

$$\eta = m\xi,$$

le procédé ancien de Côtes, suivi surtout depuis Tobie Mayer, pour la détermination du coefficient m entrant dans une équation de cette dernière forme.

Ce procédé consiste à égaler à zéro la somme

(*) Sur l'interpolation; mémoire lithographié en 1835, imprimé depuis au Journal de mathématiques de M. Liouville, mai 1837.

des écarts $\eta - m\xi$ résultant des valeurs particulières de η et ξ dues aux expériences, mais *en prenant avec un signe contraire les écarts qui répondent aux valeurs de ξ négatives.*

On tire de l'équation qui en résulte une expression :

$$m = \frac{S\eta}{S_+\xi}. \tag{15}$$

Le S_+ du dénominateur désignant la somme arithmétique des valeurs de $\xi = x - \frac{\Sigma x}{n}$ prises toutes positivement, et le S du numérateur la somme algébrique des valeurs de $\eta = y - \frac{\Sigma y}{n}$ prises avec leur signe ou avec un signe contraire selon que le ξ correspondant est positif ou négatif.

Il ne faut pas, bien entendu, confondre les sommes S, que M. Yvon Villarceau a proposé d'appeler *sommes subordonnées* (*), avec les sommes Σ des valeurs des quantités η et ξ prises chacune avec son propre signe. Ces sommes Σ sont, ici, nulles et donneraient $\frac{0}{0}$ pour m.

Il est bien évident que la valeur (15) de m est celle qui produit la compensation mutuelle des *écarts sur la valeur absolue de* ξ, c'est-à-dire des petits nombres à retrancher des ξ, pris tous positivement, pour rendre exactes les n équations particulières résultant de la substitution de $x_1 y_1$, $x_2 y_2$... pour x et y dans $\eta = m\xi$; car si ε représente ces petits nombres positifs ou négatifs, et $\Sigma\varepsilon$ leur somme

(*) Mémoire sur les étoiles doubles (inséré à la Connaissance des temps pour 1852).

algébrique, on a exactement $S\eta = m(S_+\xi - \Sigma\varepsilon)$, d'où $\Sigma\varepsilon = 0$ si l'on prend $m = \frac{S\eta}{S_+\xi}$. M. Cauchy a prouvé aussi que de toutes les valeurs de m que l'on peut tirer d'une combinaison linéaire de ces n équations inexactes, ajoutées après avoir été multipliées par des facteurs quelconques indépendants de ce nombre cherché m, la valeur (15) est celle pour laquelle *la plus grande influence à craindre* des écarts $\eta - m\xi$ ou des inexactitudes de ces mêmes équations, dans le cas le plus défavorable, est la moindre possible.

Il est facile de voir que, géométriquement, cette méthode revient à partager nos points $(x_{,}y_{,})$ $(x_{,,}y_{,,})$... en deux groupes, séparés par l'axe des abscisses x, et *à prendre, pour la droite cherchée* $y = p + mx$, *celle qui joint les centres de gravité de ces deux groupes, et qui passe nécessairement aussi par le centre de gravité général des points* (*).

(*) En effet, si $\Sigma'\xi$ représente la somme de tous les ξ négatifs que nous supposerons en nombre n', $\Sigma'\eta$ celle des η correspondants, $\Sigma''\xi$ celle des ξ positifs, supposés en nombre n'', $\Sigma''\eta$ celle des η correspondants, la tangente de l'angle formé avec l'axe des ξ par la ligne de jonction de ces deux centres de gravité partiels est

$$\frac{-\frac{1}{n'}\Sigma'\eta + \frac{1}{n''}\Sigma''\eta}{-\frac{1}{n'}\Sigma'\xi + \frac{1}{n''}\frac{\Sigma''\eta}{\Sigma''\xi}}.$$

Or, puisque l'origine est au centre de gravité général, on a $\Sigma'\xi + \Sigma''\xi = 0$, $\Sigma'\eta + \Sigma''\eta = 0$. Eliminant les Σ' au moyen de ces deux équations, et divisant haut et bas par

Observons que l'égalité posée, dans les trois méthodes, entre la somme des n valeurs du premier membre de l'équation $y=p+mx$ et la somme des n valeurs du second, équivaut, si y et x sont des logarithmes de quantités RI et U, p étant lui-même le logarithme d'un coefficient c, *à une égalité posée entre le produit des* n *valeurs particulières de* RI *et le produit des* n *valeurs correspondantes de* cU^m.

CHAPITRE DEUXIÈME.

APPLICATION AUX CANAUX DÉCOUVERTS.

7. *Discussion des expériences. Coordonnées du centre de gravité.*

En considérant d'abord le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts, à section et à pente constantes, nous avons appliqué ces trois

---

$\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}$, l'expression précédente de la tangente se réduit à

$$\frac{\Sigma''\eta}{\Sigma''\xi},$$

et a également pour valeur :

$$\frac{-\Sigma'\eta_\circ}{-\Sigma'\xi_\circ}, \quad \text{ou} \quad \frac{-\Sigma'\eta+\Sigma''\eta}{-\Sigma'\xi+\Sigma''\xi}.$$

Sous cette dernière forme, elle est identique à l'expression (15) $\frac{S\eta}{S_+\xi}$. Donc, etc.

méthodes à 93 expériences, qui ne sont autre chose que les 99 citées au *Recueil des cinq Tables* de M. de Prony, ou celles nos 1 à 91 employées par M. Eytelwein (*), plus celles 92 à 99 faites en Italie (**), mais en retranchant, de celles de Du Buat les *six* suivantes dont Prony n'a pas cru prudent de se servir dans ses Recherches physico-mathématiques, savoir :

1° Le n° 11 du mémoire d'Eytelwein ou du Recueil de cinq Tables de Prony. C'est le n° 105 de l'article 55 de Du Buat, non reproduit par lui avec les autres expériences à ses articles 377 et 389.

2° et 3° Les nos 14 et 23. Canal du Jard, fond garni de roseaux ; nos 116 et 117 de l'article 55 de Du Buat ; 176 et 175 de ses articles 404 et 405.

4° Le n° 40, Rivière de Haine, n° 184 des articles 404 et 406 de Du Buat ; expérience faite par un grand vent.

5° et 6° Les nos 32 et 39. Ce sont les nos 97 et 100 de l'article 55 de Du Buat, 156 et 163 de son article 369, où il présente ces deux expériences comme peu sûres.

Nous avons, bien entendu, pour les expériences nos 3, 4, 17, 20, 22, 46, remplacé les *vitesses observées à la surface*, mises (sans doute par erreur) à la huitième colonne de la table deuxième

(*) 5e et 6e tableau du mémoire traduit aux Annales des mines, 1825. Il y en a 36 de Du Buat (Principes d'hydraulique, t. I, art. 55), 16 de Brüning (Architecture hydraulique générale de Wiebeking, t. I, p. 344 et 388), 4 de Woltmann (Mémoire sur l'art de construire les canaux, p. 279), et 35 de Funk (Sur l'architecture hydraulique générale, p. 97 et 100).

(**) Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola d'ingegneri pontifici d'acque e strade. Milano.

du *Recueil de cinq tables*, par les vitesses moyennes que Prony en a déduites et qui sont portées à la septième colonne du tableau n° 3 des Recherches physico-mathémathiques (voir notre tableau ci-après, article 13).

Il en est résulté, n étant $= 93$, et les logarithmes étant ordinaires,

$$(16)\quad \Sigma \log(\text{RI}) = -326{,}40486,\quad \Sigma \log \text{U} = -5{,}49986;$$

d'où, pour les coordonnées du centre de gravité général des 93 points,

$$(17)\quad \frac{1}{n}\Sigma \log(\text{RI}) = -3{,}50973,\quad \frac{1}{n}\Sigma \log \text{U} = -0{,}05914.$$

8. *Exposant* m *déterminé dans la supposition où il n'y a pas d'erreurs sur* U.

En y appliquant la méthode Laplace ou de la moindre somme d'écarts, de l'article 4, les 93 expériences, rangées suivant l'ordre de grandeur du rapport

$$(18)\qquad \frac{\eta}{\xi} = \frac{l.\text{RI} - \frac{1}{n}\Sigma l.\text{RI}}{l.\text{U} - \frac{1}{n}\Sigma l.\text{U}},$$

décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, forment cette série :

Nos 41, 44, 49, 51. ... 86, 81, 67, 80, 8, 87, 94..... 99, 59, 36, 28, 42 (*).

(*) On peut, pour l'établir, se contenter de calculer les rapports $\frac{\eta}{\xi}$ avec la règle à coulisse, sauf à vérifier l'ordre de quelques numéros qui en occupent le milieu au moyen de calculs plus précis de six ou sept de ces rapports.

La somme des 93 dénominateurs $\xi = l.\mathrm{U} - \frac{1}{n}\Sigma l.\mathrm{U}$ pris tous positivement, ou la somme des grandeurs absolues des distances des 93 points à leur centre de gravité, comptées dans le sens des abscisses $l.\mathrm{U}$, est

$$23{,}81300.$$

La moitié de cette somme n'est pas encore atteinte quand on n'additionne les distances que jusqu'au n° 80 inclusivement, car le résultat de cette addition est 11,46622; elle est dépassée quand on ajoute le n° 8, car on a 12,45543. Donc la valeur de m donnant le minimum de la somme des écarts sur log RI, ou des distances des points à la ligne droite $\eta = m\xi$, mesurés dans le sens des η ou log RI, est la valeur du rapport $\frac{\eta}{\xi}$ pour l'expérience n° 8. On a donc, par cette méthode,

$$m = \frac{\eta^{(r)}}{\xi^{(r)}} = 1{,}89904.$$

En cherchant la valeur du même exposant m de U dans $\mathrm{RI} = c\mathrm{U}^m$, ou du même coefficient de $l.\mathrm{U}$ dans l'équation (4) par la méthode des moindres carrés de Legendre (art. 5), et en faisant toujours

$$l.\mathrm{U} - \frac{1}{n}\Sigma l \cdot \mathrm{U} = \xi, \quad l.\mathrm{RI} - \frac{1}{n}\Sigma l.\mathrm{RI} = \eta,$$

il faut calculer $\Sigma\xi^2$ et $\Sigma\xi\eta$. En calculant aussi $\Sigma\eta^2$ dont nous aurons besoin à l'article suivant, on trouve

(20) $\Sigma\xi^2 = 9{,}13887$; $\Sigma\xi\eta = 17{,}19213$; $\Sigma\eta^2 = 32{,}91627$.

D'où le quotient

$$m = \frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2} = 1,8812.$$

En appliquant enfin la méthode de M. Cauchy, ou des trois centres de gravité, de l'art. 6, comme nous venons déjà de trouver par l'addition des 93 valeurs absolues des ξ pris tous positivement

$$S_{+}\xi = 23,8130.$$

Et comme on trouve, en faisant la somme algébrique des 93 valeurs de η, prises aussi toutes positivement excepté celles répondant aux deux expériences n°s 28 et 42 pour lesquelles le η, ayant un signe contraire au ξ correspondant, doit être pris négativement

$$S\eta = 45,60227,$$

on a, pour le quotient,

$$m = \frac{S\eta}{S_{+}\xi} = 1,91504.$$

9. *Même exposant s'il n'y a pas d'erreurs sur* RI.

Les trois valeurs que nous venons d'obtenir pour m seraient les plus propres à compenser et corriger mutuellement, de la manière particulière à chacune des trois méthodes, les erreurs sur log RI, provenant de l'observation, ou les erreurs proportionnelles sur RI, si ce que nous avons appelé les écarts était bien ces erreurs sur les ordonnées, *ou si, comme nous avons dit, il n'y avait aucune erreur d'observation sur les abscisses log* U, et aussi si la loi du phénomène était de nature à être représentée tout à fait exac-

tement par l'équation de la forme choisie, c'est-à-dire si les deux conditions qui se trouvent remplies ordinairement dans les questions d'astronomie étaient également remplies dans celle qui nous occupe.

Mais, outre le défaut de conformité de l'équation à la loi, dont nous ferons abstraction ici, il a pu y avoir des erreurs commises dans le mesurage des vitesses U, tout comme dans le mesurage des deux facteurs du produit RI.

Nous pouvons nous proposer de compenser et corriger les *écarts* proportionnels sur U (ou ce que seraient les *erreurs* d'observation sur cet élément s'il n'y en avait pas sur RI), tout comme nous nous sommes proposé de compenser les écarts proportionnels sur RI.

Il est bien évident qu'au lieu de poser, en commençant, notre équation de relation entre la pente I, le *rayon moyen* R et la vitesse U, sous la forme (2) $RI = cU^m$, où elle est résolue par rapport au produit RI, nous pouvions tout aussi bien la poser résolue par rapport à la vitesse, ou sous cette forme

$$(21) \qquad U = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{m}} (RI)^{\frac{1}{m}}$$

et la traiter comme nous avons fait celle $RI = cU^m$.

Nous pouvons donc appliquer les méthodes Laplace, Legendre, Cauchy à l'équation

$$(22) \qquad \text{Log}\, U = -\frac{1}{m} \log c + \frac{1}{m} \log(RI)$$

résultant de ce qu'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation (21), tout comme nous avons fait pour l'équation (4) log RI = etc.,

dont celle-ci se déduit au moyen d'une simple transposition et d'une division par le nombre constant cherché m. Nous verrons ainsi quelles valeurs sont à donner à $\frac{1}{m}$, et par suite à m, pour compenser et atténuer les écarts sur log U.

Les trois nouvelles droites à déterminer passent, comme les trois premières, par le centre de gravité des 93 points ayant pour coordonnées les valeurs particulières de log U et log RI fournies par les 93 expériences.

Pour avoir l'inclinaison de celle que la méthode Laplace doit fournir, nous avons dû ranger les expériences suivant l'ordre des grandeurs décroissantes non plus de $\frac{\eta}{\xi}$, mais de $\frac{\xi}{\eta}$. L'ordre n'est pas exactement inverse de celui qui a été trouvé à l'article précédent, car les expériences 28 et 42, pour lesquelles $\frac{\eta}{\xi}$, et, par conséquent, $\frac{\xi}{\eta}$ est négatif, et qui se trouvaient pour cela placées à la fin de la première série, se trouvent encore, par la même raison, à la fin de la série nouvelle, qui est ainsi :

N°s 36, 59, 99..... 94, 87, 8, 80, 67, 81, 86..... 49, 44, 41, 42, 28.

On a, pour la somme des 93 valeurs de η prises toutes positivement,

$$S_{+}\eta = 45,78229.$$

La moitié de cette somme n'est pas encore atteinte quand on n'additionne les grandeurs de η que jusqu'au n° 67 inclusivement, car le résultat de cette addition est 22,70625; elle est dépassée quand on ajoute l'η du n° 81, car il en résulte

23,33625. Donc le $\frac{\xi}{\eta}$ de l'expérience n° 81 donne la valeur de $\frac{1}{m}$, et l'inverse, que nous appellerons $\frac{\eta^{(r')}}{\xi^{(r')}}$, est la valeur de m remplissant la condition du minimum de la somme des écarts sur l.U, *ou des distances des points à la droite*, mesurés non plus parallèlement aux ordonnées l.RI, mais *parallèlement aux abscisses* l.U. On a ainsi :

$$m = \frac{\eta^{(r')}}{\xi^{(r')}} = 1,9057.$$

Si cette valeur est un peu différente de celle 1,8990 déjà trouvée, ou si elle est fournie par une expérience (n° 81) autre que celle (n° 8) qui avait fourni la première valeur, cela s'explique en considérant que les η, dont les sommes successives ont déterminé le choix de l'expérience 81, ne varient pas proportionnellement aux ξ, dont les sommes avaient fixé le choix primitif sur celle 8. Cela tient surtout à l'influence des deux expériences 42 et 28, pour lesquelles le η est de signe contraire au ξ, et qui sont représentées graphiquement par des points placés dans les deux angles de la croix des axes coordonnés ξ, η, pour lesquels les ordonnées η ont un autre signe que les abscisses, tandis que les quatre-vingt-onze autres points sont placés dans les angles des coordonnées toutes deux positives ou toutes deux négatives.

Pour calculer la même inclinaison $\frac{1}{m}$ de la droite, par la méthode des moindres carrés de Legendre, il faut prendre

$$\frac{1}{m}=\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi\eta^2},$$

ce qui donne, d'après les valeurs numériques (20),

$$m=\frac{\Sigma\eta^2}{\Sigma\xi}=1{,}9146.$$

La différence de plus de 0,03 entre cette valeur et celle $\frac{\Sigma\eta\xi}{\Sigma\xi^2}=1{,}8812$ trouvée à l'article précédent ne peut tenir qu'à ce que les écarts y_1-p-mx_1, y_2-p-mx_2..... ne sont point assez petits devant y_1, y_2..... ou x_1, x_2..... vu l'ordre d'exactitude des expériences, pour que leurs carrés et leurs produits soient sans influence sensible sur la deuxième décimale (*).

(*) En effet, si l'on désigne par ε_1 ε_2... les écarts sur y, si l'on met pour y_1 y_2... leurs valeurs $p+mx_1-\varepsilon_1$, $p+mx_2-\varepsilon_2$..... dans les valeurs successives $y_1-\frac{1}{n}\Sigma y$, $y_2-\frac{1}{n}\Sigma y$.... de η, et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{n\Sigma\varepsilon x-\Sigma\varepsilon\Sigma x}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}=\mathrm{E},\quad \frac{n\Sigma\varepsilon^2-(\Sigma\varepsilon)^2}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}=\mathrm{E}'^2$$

on trouve facilement

$$\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}=m+\mathrm{E},\quad \frac{\Sigma\eta^2}{\xi\Sigma\eta}=m+\mathrm{E}+\frac{\mathrm{E}'^2-\mathrm{E}^2}{m+\mathrm{E}},$$

d'où

$$\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}-\frac{\Sigma\eta^2}{\Sigma\xi\eta}=\frac{\mathrm{E}^2-\mathrm{E}'^2}{\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}}.$$

En sorte que, comme nous l'avancions, la différence des deux valeurs $\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}$, $\frac{\Sigma\eta^2}{\Sigma\xi\eta}$ trouvées pour m, en appliquant la méthode de Legendre de deux manières, ne dépend que de carrés et de produits des quantités ε.

Enfin, pour calculer $\frac{1}{m}$ d'après la méthode de M. Cauchy, on n'a qu'à diviser, par la valeur $S_{+}\eta = 45,78229$ de la somme des 93 valeurs de η prises toutes positivement, celle $S\xi = 23,52684$ de la somme des valeurs de ξ prises aussi toutes positivement excepté celles relatives aux expériences nos 28 et 42. On a ainsi, en inversant :

$$m = \frac{S_{+}\eta}{S\xi} = 1,9460.$$

La droite dont l'angle avec l'axe des ξ ou des *l*.U a ce nombre pour tangente *est celle qui joint les centres de gravité des deux groupes de points séparés, non plus par l'axe des* η *comme à l'article précédent, mais par l'axe des* ξ. C'est la droite qui compense les écarts *sur les valeurs absolues de* η, ou les petits nombres à retrancher des η pris tous positivement, pour rendre exactes les n équations particulières $\eta_1 = m\xi_1$, $\eta_2 = m\xi_2$, etc.

La différence assez notable entre ce nombre et celui $\frac{S\eta}{S_{+}\xi} = 1,9150$ déjà trouvé tient entièrement à ces deux expériences nos 28 et 42, qui fournissent des nombres négatifs au numérateur $S\eta$ de l'expression de m de l'article précédent, et au dénominateur $S\xi$ de l'expression de m de celui-ci.

Le point n° 28 (*), situé dans l'angle droit des ξ négatifs et η positifs, faisait partie du groupe inférieur dans le calcul de l'article précédent, et le point n° 42, situé dans l'angle des ξ positifs et η négatifs, faisait partie du groupe supérieur. *C'est*,

(*) Voyez *fig*. 1.

au contraire, maintenant le n° 42 qui est dans le groupe inférieur, et le n° 28 dans le supérieur, ce qui fait un double motif d'augmentation de *m*. S'il n'y avait de points que dans les deux angles où les coordonnées ξ et η sont toutes les deux positives ou toutes les deux négatives, les deux valeurs de *m* données par la méthode Cauchy seraient identiques (*).

10. *Quelle valeur donner à l'exposant* m *en ayant égard simultanément aux erreurs sur* U *et aux erreurs sur* RI ?

Les trois valeurs de *m* de l'article précédent se-

(*) Il y a donc par la manière de séparer les points de l'art. 8, comme par celle de l'art. 9, 38 points dans le groupe inférieur et 55 dans le groupe supérieur. Il peut sembler plus convenable de mettre dans les deux groupes le même nombre de points, ou du moins 46 points dans l'un et 47 dans l'autre, ce qui n'empêcherait pas la ligne de leurs deux centres de gravité de passer par le centre de gravité général, bien que la séparation se fasse alors à une certaine distance de celui-ci.

Mais, de cette manière, on ferait trop dominer l'influence de la partie supérieure de la figure, où les points sont plus serrés. Les données expérimentales relatives aux petites vitesses seraient en partie sacrifiées par cela seul que, vu leur nombre relativement moindre, elles ont fourni des points plus écartés, et la formule à établir représenterait moins bien cette région du phénomène. Il convient mieux d'opérer cette séparation par une ligne passant au centre de gravité général des points, ce qui produira, comme nous avons vu aux art. 8 et 9, une valeur de *m* compensant à peu près les *écarts sur les valeurs absolues*, soit des ξ, soit des η. Il en résulte aussi une compensation des écarts qui tendent à relever la partie supérieure de la ligne ou à augmenter *m* par les écarts qui tendent à abaisser cette partie de ligne ou à diminuer *m*.

raient les meilleures, dans le système de chacune des trois méthodes, s'il n'y avait d'erreurs d'observation que sur les U, de même que celles de l'article 8 seraient les meilleures, s'il n'y en avait que sur les RI.

Comme il y en a sur les unes comme sur les autres, il convient de prendre des valeurs de m intermédiaires.

Pour trouver simplement, d'une manière approchée et probable, celles qui conviennent le mieux, nous supposerons, d'après la connaissance que nous pouvons avoir de la manière dont les expériences ont été faites, qu'il existe un rapport constant entre les erreurs proportionnelles sur RI et les erreurs proportionnelles sur U, ou, ce qui revient au même (art. 4), entre les erreurs absolues sur log RI et sur log U.

Soit $-r$ ce rapport.

Le point exact, situé sur la droite cherchée AB (*fig.* 2) supposée représenter rigoureusement la loi du phénomène, et relatif à une certaine expérience qui, en raison des erreurs de mesurage, a donné le point M, ne sera ni en N sur une parallèle MN à l'axe des ordonnées, ni en Q sur une parallèle MQ à l'axe des abscisses, mais en un point intermédiaire R, tel que l'on ait

$$\frac{MK}{KR}=r;$$

car MK sera alors l'erreur en plus sur l'ordonnée, et KR l'erreur en moins sur l'abscisse.

L'erreur *résultante* est MR, distance entre le point R, que des observations parfaitement justes auraient fourni, et le point erroné M, fourni par les observations entachées d'inexactitude.

Ce sont les distances MR, c'est-à-dire *les distances des points à la droite cherchée, mesurées par des lignes faisant avec l'axe des abscisses des angles ayant pour tangente* — r, qu'il faut atténuer et compenser les unes par les autres au moyen du choix de la valeur de m.

Comme

$$MN = MK + KN = KR.(m+r),$$

on a :

$$MR = \frac{MN}{m+r}\sqrt{1+r^2}.$$

Or les portions MN des ordonnées ont pour valeurs, aux différents points,

$$\eta_1 - m\xi_1, \quad \eta_2 - m\xi_2 \ldots.$$

On a donc, pour les *erreurs résultantes*, à compenser et atténuer :

$$(23) \quad \frac{\eta_1 - m\xi_1}{m+r}\sqrt{1+r^2}, \quad \frac{\eta_2 - m\xi_2}{m+r}\sqrt{1+r^2}, \quad \text{etc...} \; (*).$$

(*) Il peut sembler au premier abord (parce que le problème paraît être de trouver une ligne droite se rapprochant le plus possible d'une suite de points) que ce sont les écarts *normaux*, ou les petites perpendiculaires abaissées des points sur la droite cherchée, qu'il convient d'atténuer et de compenser.

Cela reviendrait à prendre $r = \frac{1}{m}$.

Mais, avec un peu de réflexion, on voit que cette manière d'appliquer les trois méthodes et d'obtenir un intermédiaire entre les valeurs trouvées en négligeant l'erreur sur l'abscisse et celles trouvées en négligeant les erreurs sur les ordonnées serait fautive. Non-seulement rien ne dit que le rapport de ces erreurs doive être constamment $\frac{1}{m}$, mais encore il faut remarquer que si l'on

Il est très-facile de déterminer les valeurs de m propres à leur atténuation et à leur compensation mutuelle à la manière de chacune des trois méthodes.

Ainsi, pour y appliquer la méthode de M. Cauchy, on mènera, par le centre de gravité C des points, une droite DE parallèle aux petites lignes MR, c'est-à-dire faisant avec l'axe des ξ un angle dont la tangente soit $-r$, et l'on prendra pour la droite cherchée celle joignant les centres de gravité des points séparés en deux groupes, non plus par $C\xi$ ou $C\eta$, *mais par cette ligne* DCE. Le groupe inférieur se composera de tous les points pour lesquels

$$\eta < -r\xi;$$

le groupe supérieur des points pour lesquels

$$\eta > -r\xi,$$

et l'on aura $m = \frac{S\eta}{S\xi}$, S étant des sommes où les η et les ξ sont pris avec leur signe ou avec un signe contraire, selon qu'ils sont relatifs à des points du groupe supérieur ou à des points du groupe inférieur.

Pour y appliquer la méthode Laplace, on n'a qu'à transformer les coordonnées $\xi = Cp$ et

---

prend une échelle différente pour les abscisses et pour les ordonnées, ce que l'on fait souvent pour ne pas avoir des lignes trop inclinées et pour rendre plus sensibles les écarts, ou si, ce qui revient au même (et ce qui est permis) on vient à représenter par l'ordonnée le double ou le décuple de ce qu'on représentait d'abord, les grandeurs géométriques de m fournies par la méthode des petites normales ne suivraient nullement la même proportion, comme cela devrait être.

$\eta = Mp$ en d'autres Cp', Mp' respectivement perpendiculaire et parallèle à CD, et ayant la même origine C. On aura, pour ces coordonnées nouvelles :

$$(24) \quad \frac{\xi + \eta r}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \frac{\eta - \xi r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

On rangera donc les expériences par ordre des grandeurs décroissantes des rapports

$$(25) \quad \frac{\eta - \xi r}{\xi + \eta r} = \frac{\frac{\eta}{\xi} - r}{1 + r\frac{\eta}{\xi}},$$

ce qui n'exigera pas qu'on les calcule, car il suffira de connaître seulement le plus grand de tous ceux qui sont positifs, et de placer l'expérience qui l'a fourni en tête de la liste, en conservant du reste l'ordre trouvé à l'article 8 et déterminé par les grandeurs de $\frac{\eta}{\xi}$. Puis on prendra pour valeur de η celle des $\frac{\eta}{\xi}$ relatifs au point pour lequel la somme des numérateurs $\xi + \eta r$ des abscisses (additionnés successivement et tous positivement) commence à excéder la moitié de leur somme générale $S_+(\xi + \eta r)$.

Enfin, pour y appliquer la méthode de Legendre, on n'a qu'à imposer la condition de la moindre somme des carrés des erreurs résultantes

$$\frac{\eta - m\xi}{m+r}\sqrt{1+r^2},$$

ou à poser

$$\Sigma\left(\frac{\eta - m\xi}{m+r}\right)^2 = \text{minimum}.$$

Différenciant par rapport à m on obtient, pour le déterminer, l'équation

$$(26)\qquad \Sigma\left[(m+r)(\eta - m\xi)(-\xi) - (\eta - m\xi)^2\right] = 0,$$

dans laquelle nous n'effacerons point le second terme entre crochets, puisque nous ne supposons pas, comme Laplace (art. 9), que le carré des écarts $\eta - m\xi$ soit tout à fait négligeable devant leur première puissance multipliée par l'abscisse. Cette équation donne

$$(26)\qquad m = \frac{\Sigma\eta^2 + r\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi\eta + r\Sigma\xi^2},$$

ou, si l'on représente respectivement par m', m'' les valeurs $\frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2}$, $\frac{\Sigma\eta^2}{\Sigma\xi\eta}$ que la méthode Legendre a données pour m aux articles 8 et 9 :

$$(27)\qquad m = m'\cdot\frac{m''+r}{m'+r} = m' + \frac{m'}{m'+r}(m'' - m').$$

11. *Application.*

Cette expression (27) d'une valeur intermédiaire entre celles m' et m'' trouvées lorsque l'on néglige alternativement les erreurs proportionnelles sur l'abscisse et les erreurs proportionnelles sur l'ordonnée, est la plus simple qu'on puisse désirer. Elle redonne bien m' quand on suppose $r = \infty$ ou les erreurs sur log U nulles, et m'' quand on suppose $r = 0$ ou les erreurs sur l.RI nulles.

Aussi, quoiqu'elle n'ait été fournie que par la

méthode des moindres carrés, l'appliquerons-nous aussi aux valeurs de m' et m'' trouvées aux n°s 8 et 9 par l'emploi des deux autres méthodes, ce qui donnera un résultat non moins approché que si nous faisions subir à ces deux méthodes les modifications indiquées à l'article précédent.

De plus, nous prendrons pour m' la moyenne arithmétique des valeurs de m trouvées article 8 par les trois méthodes, ou

$$m' = 1{,}8984;$$

et pour m'' la moyenne de celles trouvées article 9, ou

$$m'' = 1{,}9221.$$

Quant à la valeur à adopter pour r, observons que les expériences sur les grands cours d'eau naturels ont pu donner quelquefois, sur la vitesse U, des erreurs proportionnelles presque aussi grandes que les erreurs proportionnelles sur la pente I, dont le mesurage est toujours délicat, mais que, dans les expériences en petit, la valeur de la vitesse U, prise en mesurant des volumes écoulés, est peu sujette à erreur. Nous prendrons donc

$$r = 2,$$

ou, moyennement, les erreurs proportionnelles sur RI, doubles de celles sur U.

La formule (27) donnera :

$$m = m' + \frac{m'}{m' + 2}(m'' - m') = 1{,}8984 + 0{,}0115 = 1{,}9099.$$

12. *Formule monôme pour les canaux.*

Comme on a toujours une petite latitude dans le choix d'un paramètre d'une formule représentative à deux ou plusieurs paramètres, il convient d'en

profiter pour prendre pour l'exposant m une fraction assez simple, afin que l'on puisse, dans les applications, multiplier facilement par cette fraction et par son inverse les logarithmes de U et de RI.

Or les fractions simples qui se rapprochent le plus de la valeur 1,9099 qu'on vient de trouver pour m sont :

$$\frac{19}{10} = 1{,}9000, \quad \frac{21}{11} = 1{,}9091, \quad \frac{23}{12} = 1{,}9167.$$

Nous prendrons celle $\frac{21}{11}$ comme la plus approchée, et aussi comme se prêtant plus facilement au calcul; car la multiplication et la division de nombres de plusieurs chiffres s'effectue aussi facilement par 11 que par un nombre d'un seul chiffre, sans écrire autre chose que le résultat; et, si l'on n'acquiert pas l'habitude de faire de même pour la multiplication et la division par 21, on peut multiplier ou diviser successivement par 3 et par 7, opérations toutes faciles, et dont la dernière, si l'on a soin de réserver une multiplication pour la fin, peut se faire en même temps qu'une addition à un autre logarithme, comme celui du coefficient c.

L'exposant m étant choisi, le coefficient c s'en déduit, dans toutes les méthodes, par la formule (11, de l'article 4)

$$\text{(28)} \qquad \text{Log}\, c = \frac{1}{n} \Sigma \log \text{RI} - m \cdot \frac{1}{n} \Sigma \log \text{U},$$

ou par la condition que la somme algébrique des écarts absolus, soit *sur log* RI, soit *sur log* U,

et par conséquent des écarts proportionnels sur RI et sur U, soit nulle. Il en résulte

$$\text{Log}\, c = -3{,}39683{,}0, \quad -\log.\, c^{\frac{1}{m}} = 1{,}77929{,}2\,;$$

d'où les deux formules empiriques monômes

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{l} RI = 0{,}00040102\, U^{\frac{21}{11}} \\ U = 60{,}158\, (RI)^{\frac{11}{21}} \end{array} \right. .$$

13. *Comparaison de diverses formules avec l'expérience.*

Voici un tableau comparé des valeurs de U données :

1° Par l'expérience ;

2° Par la formule (1) de Prony, où l'on a les valeurs

$$a = 0{,}0000444499, \quad b = 0{,}0003093140$$

obtenues seulement au moyen de 30 expériences de Du Buat, auxquelles M. de Prony a joint une expérience de Chézy sur la rigole de Courpalet ;

3° Par la formule semblable de M. Eytelwein, qui a obtenu

$$a = 0{,}0000242651, \quad b = 0{,}0003655430$$

au moyen de 36 expériences de Du Buat, et 55 d'hydrauliciens allemands ;

4° Par notre formule monôme (28) à exposant $\frac{21}{11}$ ou $\frac{11}{21}$;

5° Par une autre formule semblable

$$RI = 0{,}00039560\, U^{\frac{15}{8}} \quad \text{ou} \quad U = 65{,}282\, (RI)^{\frac{8}{15}},$$

dressée tant par tracé que par calcul, en nous servant seulement des 51 premières expériences de notre tableau, qui vont jusqu'à celle numérotée 99 inclusivement, ou à celle 54 exclusivement, c'est-à-dire jusqu'à $U = 1^m,20$ au plus, à cause du reproche qui a été fait récemment à la formule Eytelwein (*) d'avoir été dressée avec des expériences trop variées et trop dissemblables, et pour des vitesses considérables que l'on ne donne jamais à l'eau dans des canaux artificiels, à l'établissement desquels la formule est surtout destinée.

Dans ce tableau nous avons intercalé les huit expériences d'Italie (92 à 99) à la place que leur assignait la grandeur des vitesses, et nous avons interverti les autres numéros conformément aux corrections faites, comme nous avons dit (art. 7), aux *vitesses observées* du *Recueil de cinq tables*, de Prony. Nous avons corrigé aussi quelques vitesses calculées et d'autres erreurs de la table deuxième du Recueil que nous citons.

La seconde et la troisième colonne contiennent les numéros correspondants des Recherches physico-mathématiques de Prony, et des Principes de Du Buat, ainsi que le nom des expérimentateurs autres que celui-ci.

(*) M. Dupuit, Études, art. 34.

NOMS des observateurs autres que de Du Buat, et numéros — au Recueil de cinq tables.	aux Recherches physico-mathémat.	aux Principes de Du Buat, articles 389 et 404.	VALEURS du produit RI.	VITESSES observées.	VITESSES calculées par la formule — Binôme à coefficients — Prony.	Rytelwein.	Monôme à exposant — $\frac{11}{21}$	$\frac{8}{15}$
1	2	121 Y.	0,0000080	0,124	0,104	0,118	0,129	0,125
2	3	124 Z.	0,0000128	0,154	0,144	0,157	0,165	0,160
3	4	177 (Jard). .	0,0000185	0,161	0,179	0,194	0,200	0,195
4	5	179 (*Id.*). . .	0,0000214	0,172	0,201	0,211	0,215	0,241
7	6	178 (*Id.*). . .	0,0000286	0,212	0,241	0,249	0,251	0,246
5	7	126 M.	0,0000239	0,242	0,216	0,225	0,228	0,224
6	8	127 S.	0,0000316	0,249	0,256	0,263	0,264	0,260
8	9	128 N.	0,0000317	0,263	0,256	0,263	0,265	0,260
9	Weltmann.		0,0000361	0,281	0,277	0,282	0,283	0,279
10	*Id.*		0,0000397	0,281	0,293	0,298	0,298	0,293
17	10	181 (Haine).	0,0000446	0,301	0,315	0,318	0,317	0,312
12	Woltmann.		0,0000443	0,320	0,313	0,316	0,315	0,311
13	11	130 T.	0,0000427	0,327	0,306	0,310	0,309	0,305
15	12	131 O.	0,0000352	0,334	0,273	0,279	0,279	0,275
20	13	180 (Jard). .	0,0000513	0,348	0,341	0,343	0,341	0,336
22	14	183 (Haine).	0,0000496	0,353	0,336	0,337	0,335	0,330
16	15	132 R.	0,0000473	0,367	0,326	0,329	0,326	0,322
18	16	133 V.	0,0000569	0,384	0,360	0,360	0,357	0,352
19	17	135 X.	0,0000695	0,421	0,401	0,404	0,399	0,396
21	Woltmann.		0,0000650	0,430	0,392	0,390	0,386	0,382
24	18	138 D.	0,0001126	0,495	0,536	0,523	0,514	0,512
25	19	143 P.	0,0000959	0,548	0,490	0,480	0,473	0,470
26	20	144 E.	0,0001376	0,549	0,599	0,581	0,571	0,569
27	21	149 F.	0,0001560	0,606	0,644	0,623	0,612	0,611
28	Funk (en petit). .		0,0003157	0,633	0,940	0,896	0,882	0,887
29	22	151 G.	0,0001664	0,637	0,665	0,642	0,631	0,630
95	Bonati.		0,0001613	0,687	0,654	0,632	0,621	0,620
30	23	155 C.	0,0002108	0,735	0,757	0,727	0,714	0,715
96	Bonati.		0,0003283	0,736	0,790	0,758	0,745	0,746
31	24	148 A.	0,0001841	0,745	0,703	0,677	0,665	0,665
33	25	160 Q.	0,0001870	0,766	0,709	0,683	0,671	0,671
34	Brünings.		0,0002548	0,771	0,838	0,802	0,789	0,791
35	26	157 H.	0,0002212	0,772	0,777	0,745	0,732	0,783
36	Funk.		0,0003083	0,772	0,930	0,885	0,872	0,876
46	27	182 (Haine).	0,0002476	0,776	0,826	0,791	0,777	0,779
37	28	161 B.	0,0002190	0,783	0,773	0,742	0,728	0,730
38	29	162 I.	0,0002412	0.816	0,814	0,780	0,766	0,768
41	30	164 K.	0,0002522	0,863	0,834	0,798	0,784	0,787
42	31	165 L.	0,0002566	0,880	0,842	0,806	0,792	0,794
43	Brünings.		0,0003304	0,917	0,964	0,923	0,904	0,909
44	*Id.*		0,0004191	0,918	1,094	1,038	1,000	1,034
45	*Id.*		0,0003929	0,938	1,058	1,004	0,989	0,996
47	*Id.*		0,0004035	0,975	1,052	1,019	1,003	1,011
48	Funk.		0,0004215	1,011	1,074	1,036	1,027	1,034
49	*Id.*		0,0006901	1,035	1,423	1,341	1,329	1,346
50	Brünings.		0,0004166	1,039	1,061	1,034	1,020	1,028
51	Funk.		0,0006609	1,057	1,392	1,312	1,299	1,315

	NOMS des observateurs ; et numéros au *Recueil de cinq tables.*	VALEURS du produit RI.	VITESSES observées.	VITESSES calculées par la formule binôme à coefficients — Prony.	binôme à coefficients — Eytelwein.	monôme à exposant — $\frac{11}{21}$	monôme à exposant — $\frac{8}{15}$
52	Brünings.	0,0003956	1,092	1,041	1,007	0,993	1,000
99	Ecole romaine. .	0,0003725	1,115	1,028	0,977	0,962	0,968
53	Brünings.	0,0005809	1,122	1,300	1,228	1,214	1,229
98	Ecole romaine. .	0,0004627	1,146	1,156	1,095	1,080	1,090
54	Brünings.	0,0005642	1,210	1,280	1,210	1,196	1,209
55	*Id.*	0,0004648	1,218	1,130	1,094	1,080	1,090
56	*Id.*	0,0005790	1,225	1,292	1,225	1,212	1,225
57	Funk.	0,0008175	1,226	1,557	1,463	1,435	1,473
58	*Id.*	0,0007174	1,239	1,453	1,368	1,356	1,374
97	Bonati.	0,0007052	1,269	1,440	1,356	1,344	1,361
59	Brünings.	0,0003580	1,274	1,006	0,957	0,942	0,948
60	*Id.*	0,0004469	1,293	1,102	1,073	1,058	1,066
61	*Id.*	0,0006507	1,299	1,380	1,302	1,289	1,304
62	*Id.*	0,0006559	1,304	1,386	1,306	1,294	1,310
63	Funk.	0,0007590	1,337	1,496	1,408	1,397	1,416
92	Bidone.	0,0007066	1,366	1,442	1,358	1,345	1,363
64	Funk.	0,0007749	1,417	1,513	1,423	1,415	1,431
65	*Id.*	0,0008000	1,450	1,542	1,446	1,436	1,456
66	*Id.*	0,0007575	1,467	1,494	1,407	1,391	1,411
67	Brünings.	0,0008374	1,474	1,575	1,481	1,471	1,492
68	Funk.	0,0009422	1,490	1,675	1,572	1,564	1,589
69	*Id.*	0,0007182	1,502	1,411	1,369	1,357	1,375
70	*Id.*	0,0008508	1,506	1,588	1,493	1,483	1,505
71	*Id.*	0,0011335	1,509	1,844	1,728	1,723	1,753
72	*Id.*	0,0009568	1,575	1,682	1,585	1,577	1,601
93	Bidone.	0,0009343	1,586	1,663	1,566	1,557	1,581
73	Funk.	0.0009181	1,597	1,652	1,552	1,543	1,567
74	*Id.*	0,0010230	1,600	1,442	1,640	1,633	1,660
75	*Id.*	0,0009461	1,608	1,680	1,576	1,569	1,594
76	*Id.*	0,0012445	1,626	1,935	1,812	1,810	1,843
77	*Id.*	0,0009631	1,663	1,694	1,590	1,582	1,607
94	Bidone.	0,0010849	1,692	1,802	1,690	1,684	1,713
78	Funk.	0,0010745	1,735	1,793	1,681	1,676	1,704
79	*Id.*	0,0011647	1,757	1,870	1,752	1,748	1,779
80	*Id.*	0,0012489	1,820	1,938	1,815	1,813	1,846
81	*Id.*	0,0013210	1,869	1,996	1,868	1,866	1,901
82	*Id.*	0,0014980	1,919	2,130	1,991	1,994	2,034
83	*Id.*	0,0015613	1,993	2,176	2,034	2,038	2,080
84	*Id.*	0,0016040	2,008	2,206	2,062	2,067	2,110
85	*Id.*	0,0016297	2,035	2,224	2,078	2,084	2,128
86	*Id.*	0,0015700	2,040	2,182	2,039	2,043	2,086
87	*Id.*	0,0016393	2,101	2,232	2,085	2,091	2,135
88	*Id.*	0,0017309	2,119	2,205	2,141	2,151	2,197
89	*Id.*	1,0019626	2,294	2,442	2,284	2,298	2,350
90	*Id.*	1,0022389	2,409	2,611	2,442	2,462	2,521
91	*Id.*	1,0021642	2,416	2,574	2,400	2,418	2,475

On voit, d'après ce tableau, que notre formule monôme à exposant $\frac{11}{21}$ ou $\frac{21}{11}$ donne, pour la vitesse moyenne U, correspondant à des grandeurs données du produit RI, des valeurs différant fort peu de celles fournies par la formule binôme à coefficients Eytelwein, et généralement aussi rapprochées que ceux-ci des vitesses données par l'expérience.

Quant à la formule à exposant $\frac{8}{15}$ ou $\frac{15}{8}$, composée seulement avec les expériences ayant donné des vitesses au-dessous de $1^m,20$, elle peut être préférable dans ces limites; mais on voit que l'approximation qu'elle donne de plus est peu de chose, et qu'on ne peut l'étendre à des vitesses au delà de $1^m,50$, car elle donne alors des résultats trop forts (*).

(*) On voit aussi par la comparaison numérique (qui n'avait encore été faite nulle part jusqu'à $2^m,50$) entre les résultats des deux formules binômes à coefficients Prony et Eytelwein, que la formule Prony, dressée avec des expériences où la vitesse n'a pas dépassé $0^m,88$, non-seulement donne des vitesses trop fortes passé cette grandeur, mais encore ne satisfait pas mieux aux observations, pour des vitesses au-dessous, que celle à coefficients Eytelwein. Cela me paraît justifier la préférence donnée à celle-ci par la plupart des ingénieurs, quelque fondement que puisse avoir une partie des critiques de M. Dupuit, qui s'adressent d'ailleurs à toute formule ne contenant que la vitesse moyenne et encore plus aux expérimentateurs allemands, et malgré l'objection que nous avons faite nous-mêmes ci-dessus (art. 4, 2e note) contre la manière dont M. Eytelwein applique la méthode Laplace en la dénaturant.

On ne doit pas s'étonner, au reste, que deux formules

Nous pensons donc qu'il y a lieu d'adopter la formule (29) à exposant $\frac{21}{11}$ ou $\frac{11}{21}$, que l'on peut même réduire, pour la rendre plus facile à retenir, à

$$(30)\qquad \left\{ \begin{array}{l} RI = 0{,}0004\,U^{\frac{21}{11}} \\ U = 60\,(RI)^{\frac{11}{21}} \end{array} \right. ;$$

car une différence de 1/400 sur RI ou sur U est sans importance (*).

---

dont les coefficients sont aussi différents que ceux Prony et Eytelwein représentent presque aussi bien l'une que l'autre les expériences de $0^m{,}20$ à 1 mètre. On peut choisir arbitrairement l'un des deux coefficients dans le champ assez étendu des anomalies des expériences. Si l'autre est calculé de manière que les écarts en plus compensent à peu près les écarts en moins, l'équation représentera toujours les expériences à cela près de quantités de l'ordre des erreurs de l'observation.

(*) M. Courtois a proposé (Traité des moteurs inanimés, art. 99) une formule $RI = 0{,}007848\,\frac{U^2}{2g}$ qui revient, en faisant $g = 9^m81$, à $RI = 0{,}0004U^2$, ou $U = 50\sqrt{RI}$. M. Courtois ne dit pas comment il a calcule son coefficient.

Cette formule est exactement la même que celle de M. Tadini (Nadault de Buffon, Des canaux d'arrosage, liv. v, chap. xxi, t. II, p. 220), excepté que les hydrauliciens italiens mettent en général, dans les formules, la profondeur moyenne de l'eau au lieu du rayon moyen.

Si nous adoptions, comme ces ingénieurs, 2 pour la valeur de l'exposant m de notre formule, l'équation (28) et les valeurs (17) que nous avons trouvées pour $\frac{1}{n}\Sigma l.$ U

14. *Lignes figuratives. Table usuelle. Observation sur une solution plus exacte et moins empirique des questions d'hydraulique.*

On peut voir sur la *fig.* 1, où l'on a rapporté la suite des points dont les abscisses sont les valeurs de log U, et les ordonnées les valeurs de log (RI), U et RI ayant les valeurs fournies par l'expérience, et rapportées à la cinquième et à la quatrième colonnes de la table de l'article précédent, que ces 93 points, sauf ceux qui s'écartent beaucoup des autres, sont convenablement remplacés par la ligne droite en pente de $\frac{21}{11}$ passant par leur centre de gravité. La ligne (ponctuée) en pente de $\frac{15}{8}$, et la ligne en pente

et $\frac{1}{n}\Sigma l.\mathrm{RI}$, nous donnent $c = 0{,}0004063\,98$, d'où $\mathrm{RI} = 0{,}0004064\,\mathrm{U}^2$ et $\mathrm{U} = 49{,}6\sqrt{\mathrm{RI}}$.

Mais, en supposant même que ces formules en U^2 donnent pour U des valeurs dont la plupart ne s'écartent pas de celles fournies par l'expérience au delà des limites des erreurs de l'observation, il n'est pas moins vrai et il est très-facile de voir par la suite des points construits, en prenant pour leurs coordonnées soit $l.\mathrm{U}$ et $l.\mathrm{RI}$, soit U et $\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{U}}$, que, conformément à la remarque faite pour la première fois par Du Buat, les *résistances sont en moindre raison que les carrés des vitesses* (Principes d'hydr., art. 27); en sorte qu'il convient, dans l'expression empirique de RI, ou de donner à U un exposant plus petit que 2, comme nous avons fait, ou de joindre au terme en U^2 un terme en U, comme Girard et Prony, qui certes ne l'ont fait que parce qu'ils s'y sont vus obligés.

de $\frac{2}{1}$ s'en écarte sensiblement, surtout dans le bas.

La planche suivante, *fig.* 4, donne la suite des points ayant pour abscisses les valeurs de U, et pour ordonnées les valeurs de $\frac{RI}{U}$ (*).

On voit que la courbe $\frac{RI}{U} = 0{,}000401\,U^{\frac{10}{11}}$ les remplace aussi bien que la ligne droite construite avec la formule Eytelwein divisée par U, et bien mieux que la ligne droite construite de même avec la formule Prony, qui semble n'avoir pas d'avantages sur celle construite avec la formule des ingénieurs italiens $\frac{RI}{U} = 0{,}0004U$.

(*) Voici la suite de ces valeurs multipliée par 1000 :

Numéros.	$1000\frac{RI}{U}$	Numéros.	$1000\frac{RI}{U}$	Numéros.	$1000\frac{RI}{U}$	Numéros.	$1000\frac{RI}{U}$	Numéros.	$1000\frac{RI}{U}$
1	0,0645	21	0,1512	42	0,2916	59	0,2810	76	0,7654
2	0,0831	24	0,2275	43	0,3603	60	0,3456	77	0,5791
3	0,1149	25	0,1750	44	0,4565	61	0,5009	94	0,6412
4	0,1244	26	0,2506	45	0,4189	62	0,3030	78	0,6193
7	0,1349	27	0,2589	47	0,4138	63	0,5677	79	0,6629
5	0,0988	28	0,4987	48	0,4169	92	0,5173	80	0,6862
6	0,1269	29	0,2612	49	0,6668	64	0,5469	81	0,7062
8	0,1205	95	0,2348	50	0,4010	65	0,5517	82	0,7806
9	0,1285	30	0,2868	51	0,6253	66	0,5143	83	0,7834
10	0,1413	96	0,3102	52	0,3623	67	0,5681	84	0,7988
17	0,1482	31	0,2471	99	0,3341	68	0,6323	85	0,8008
12	0,1384	33	0,2441	53	0,5177	69	0,4782	86	0,7696
13	0,1306	34	0,3305	98	0,4055	70	0,5650	87	0,7802
15	0,1054	35	0,2865	54	0,4663	71	0,7512	88	0,8168
20	0,1474	36	0,3993	55	0,3816	72	0,6075	89	0,8555
22	0,1405	46	0,3191	56	0,4727	93	0,5749	90	0,9294
16	0,1289	37	0,2797	57	9,6668	73	0,5749	91	0,8958
18	0,1458	38	0,2955	58	0,5790	74	0,6394		
19	0,1661	41	0,2922	97	0,5557	75	0,5896		

On peut voir aussi que notre parabole de degré $\frac{10}{11}$ ne diffère guère d'une droite, excepté à peu de distance de son sommet ou pour des valeurs très-petites de U.

Il est bien entendu, d'ailleurs, que je n'accorde à une pareille équation qu'une valeur d'usage, purement empirique, bonne seulement entre les limites des vitesses pour lesquelles elle a été établie, et à laquelle, hors de ces limites, il ne faudrait point se fier. Comme MM. Sonnet (*) et Dupuit, je pense que l'expression binôme elle-même n'a pas d'autre valeur, et que, pour obtenir une formule exacte, il faudrait exprimer le *frottement extérieur* ou la résistance des parois et de l'air en fonction, non pas de la vitesse moyenne, mais des vitesses des filets contigus, vitesses dont la relation avec la vitesse moyenne ne peut être établie qu'au moyen de la connaissance préalable du *frottement intérieur*, ou des actions latérales des filets les uns sur les autres. Le mémoire cité à l'article 2, et publié par extrait aux Comptes-rendus en 1843, c'est-à-dire quinze mois avant les travaux de M. Sonnet, prouve (ainsi qu'un autre mémoire présenté et déposé à l'Académie le 14 avril 1834) que depuis longtemps j'ai fait, dans cette direction, des recherches détaillées ayant pour objet de tenir compte de ces éléments d'une manière très-approchée, recherches dont le résultat ne m'a pas encore suffisamment contenté pour en faire la base de propositions pratiques.

(*) Comptes rendus de l'Académie, 20 janvier 1845, t. XX, p. 150 et 786; et Recherches sur le mouvement uniforme des eaux, par M. Sonnet, in-4°, 1845.

J'exprimerai, dans un autre mémoire, ce que je pense de l'avenir de ces sortes de considérations, et des expériences spéciales qui seraient à entreprendre pour leur donner une base quelque peu sûre. Je dirai seulement, en attendant, que si l'hypothèse de Newton, reproduite par MM. Navier et Poisson, et qui consiste à prendre le frottement intérieur proportionnel à la vitesse relative des filets glissant les uns devant les autres, peut être appliquée approximativement pour les divers points d'une même section fluide, tous les faits connus portent à inférer qu'il faut faire croître le *coefficient* de cette proportionnalité avec les dimensions des sections transversales; ce qui s'explique jusqu'à un certain point en remarquant que les filets ne marchent pas parallèlement entre eux avec des vitesses régulièrement graduées de l'un à l'autre, et que les *ruptures*, les tourbillonnements et les autres mouvements compliqués ou obliques, qui doivent beaucoup influer sur la grandeur des frottements, se forment et se développent davantage dans les grandes sections.

MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

Table des valeurs de $\frac{\omega}{\chi} I = RI$ *ou du produit du rayon moyen et de la pente par mètre courant, ou table donnant, pour chaque grandeur de la vitesse moyenne* U *dans un courant uniforme, la petite hauteur* RI *du prisme fluide, dont le poids mesure le frottement moyen de l'eau sur une surface de parois égale à sa base, cette hauteur étant calculée par la formule*

$$RI = 0,000\,401\,02\, U^{\frac{21}{11}}.$$

Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Différences.	Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Différences.
m.	m.		m.	m.	382
0,10	0,000 004 94	99	0,47	0,000 094 88	389
0,11	0,000 005 93	107	0,48	0,000 098 77	397
0,12	0,000 007 00	116	0,49	0,000 102 74	404
0,13	0,000 008 16	124	0,50	0,000 106 78	411
0,14	0,000 009 40	132	0,51	0,000 110 89	419
0,15	0,000 010 72	141	0,52	0,000 115 08	426
0,16	0,000 012 13	149	0,53	0,000 119 34	433
0,17	0,000 013 62	157	0,54	0,000 123 67	441
0,18	0,000 015 19	165	0,55	0,000 128 08	449
0,19	0,000 016 84	173	0,56	0,000 132 57	456
0,20	0,000 018 57	181	0,57	0,000 137 13	463
0,21	0,000 020 38	189	0,58	0,000 141 76	470
0,22	0,000 022 27	198	0,59	0,000 146 46	477
0,23	0,000 024 25	205	0,60	0,000 151 23	485
0,24	0,000 026 30	213	0,61	0,000 156 08	492
0,25	0,000 028 43	221	0,62	0,000 161 00	499
0,26	0,000 030 64	229	0,63	0,000 165 99	507
0,27	0,000 032 93	237	0,64	0,000 171 06	514
0,28	0,000 035 30	244	0,65	0,000 176 20	521
0,29	0,000 037 74	253	0,66	0,000 181 41	528
0,30	0,000 040 27	260	0,67	0,000 186 69	536
0,31	0,000 042 87	268	0,68	0,000 192 05	543
0,32	0,000 045 55	275	0,69	0,000 197 48	550
0,33	0,000 048 30	284	0,70	0,000 202 98	557
0,34	0,000 051 14	291	0,71	0,000 208 55	564
0,35	0,000 054 05	298	0.72	0,000 214 19	571
0,36	0,000 057 03	306	0,73	0,000 219 90	579
0,37	0,000 060 09	314	0,74	0,000 225 69	586
0,38	0,000 063 23	322	0,75	0,000 231 55	593
0,39	0,000 066 45	329	0,76	0,000 237 48	600
0,40	0,000 069 74	336	0,77	0,000 243 48	607
0,41	0,000 073 10	345	0,78	0,000 249 55	615
0,42	0,000 076 55	352	0,79	0,000 255 70	622
0,43	0,000 080 07	359	0,80	0,000 261 92	639
0,44	0,000 083 65	367	0,81	0,000 268 21	635
0,45	0,000 087 32	374	0,82	0,000 274 56	642
0,46	0,000 091 06	382	0,83	0,000 280 98	650

Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Différences.	Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Différences.
m.	m.		m.	m.	
0,84	0,000 287 48	650	1,39	0,000 752 0	103
0,85	0,000 294 05	657	1,40	0,000 762 3	103
0,86	0,000 300 69	664	1,41	0,000 772 7	104
0,87	0,000 307 40	671	1,42	0,000 783 2	105
0,88	0,000 314 18	678	1,43	0,000 793 8	106
0,89	0,000 321 03	685	1,44	0,000 804 4	106
0,90	0,000 327 95	692	1,45	0,000 815 1	107
0,91	0,000 334 94	699	1,46	0,000 825 9	108
0,92	0,000 342 01	707	1,47	0,000 836 7	108
0,93	0,000 349 13	712	1,48	0,000 847 6	109
0,94	0,000 356 34	721	1,49	0,000 858 6	110
0,95	0,000 363 61	727	1,50	0,000 869 7	111
0,96	0,000 370 95	734	1,51	0,000 880 8	111
0,97	0,000 378 36	741	1,52	0,000 891 9	111
0,98	0,000 385 85	749	1,53	0,000 903 1	112
0,99	0,000 393 41	756	1,54	0,000 914 4	113
1,00	0,000 401 03	762	1,55	0,000 925 8	114
1,01	0,000 408 7	767	1,56	0,000 937 2	114
1,02	0,000 416 5	78	1,57	0,000 948 8	116
1,03	0,000 424 3	78	1,58	0,000 960 4	116
1,04	0,000 432 2	79	1,59	0,000 972 0	116
1,05	0,000 440 2	80	1,60	0,000 983 7	117
1,06	0,000 448 2	80	1,61	0,000 995 5	118
1,07	0,000 456 3	81	1,62	0,001 007 3	118
1,08	0,000 464 5	82	1,63	0,001 019 2	119
1,09	0,000 472 7	82	1,64	0,001 031 2	120
1,10	0,000 481 0	83	1,65	0,001 043 2	120
1,11	0,000 489 4	84	1,66	0,001 055 3	121
1,12	0,000 497 9	85	1,67	0,001 067 5	122
1,13	0,000 506 4	85	1,68	0,001 079 7	122
1,14	0,000 515 0	86	1,69	0,001 092 0	123
1,15	0,000 523 7	87	1,70	0,001 104 4	124
1,16	0,000 532 4	87	1,71	0,001 116 9	125
1,17	0,000 541 2	88	1,72	0,001 129 3	124
1,18	0,000 550 0	88	1,73	0,001 141 9	126
1,19	0,000 559 0	90	1,74	0,001 154 5	126
1,20	0,000 568 0	90	1,75	0,001 167 2	127
1,21	0,000 577 1	91	1,76	0,001 180 0	128
1,22	0,000 586 2	91	1,77	0,001 192 8	128
1,23	0,000 595 4	92	1,78	0,001 205 7	129
1,24	0,000 604 7	93	1,79	0,001 218 7	130
1,25	0,000 614 0	93	1,80	0,001 231 7	130
1,26	0,000 623 4	94	1,81	0,001 244 8	131
1,27	0,000 632 9	95	1,82	0,001 258 0	132
1,28	0,000 642 5	96	1,83	0,001 271 2	132
1,29	0,000 652 1	96	1,84	0,001 284 5	133
1,30	0,000 661 8	97	1,85	0,001 297 8	133
1,31	0,000 671 5	97	1,86	0,001 311 3	135
1,32	0,000 681 3	98	1,87	0,001 324 8	135
1,33	0,000 691 2	99	1,88	0,001 338 4	136
1,34	0,000 701 1	99	1,89	0,001 352 0	136
1,35	0,000 711 2	101	1,90	0,001 365 6	136
1,36	0,000 721 3	101	1,91	0,001 379 4	138
1,37	0,000 731 5	102	1,92	0,001 393 2	138
1,38	0,000 741 7	102	1,93	0,001 407 1	139
		103			139

Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Diffé-rences.	Vitesse U.	VALEUR correspondante de RI.	Diffé-rences.
m.	m.		m.	m.	
1,94	0,001 421 0	139	2,48	0,002 271 0	174
1,95	0,001 435 0	140	2,49	0,002 288 5	175
1,96	0,001 449 1	141	2,50	0,002 306 1	176
1,97	0,001 463 3	142	2,51	0,002 323 7	176
1,98	0,001 477 5	142	2,52	0,002 341 4	177
1,99	0,001 491 8	143	2,53	0,002 359 2	178
2,00	0,001 506 2	144	2,54	0,002 377 0	178
2,01	0,001 520 6	144	2,55	0,002 394 9	179
2,02	0,001 535 1	145	2,56	0,002 412 9	180
2,03	0,001 549 6	145	2,57	0,002 430 9	180
2,04	0,001 564 2	146	2,58	0,002 449 0	181
2,05	0,001 578 8	146	2,59	0,002 467 1	181
2,06	0,001 593 5	147	2,60	0,002 485 3	182
2,07	0,001 608 3	148	2,61	0,002 503 6	183
2,08	0,001 623 2	149	2,62	0,002 522 0	184
2,09	0,001 638 2	150	2,63	0,002 540 4	184
2,10	0,001 653 2	150	2,64	0,002 558 9	185
2,11	0,001 668 3	151	2,65	0,002 577 4	185
2,12	0,001 683 4	151	2,66	0,002 596 0	186
2,13	0,001 698 6	152	2,67	0,002 614 7	187
2,14	0,001 713 8	152	2,68	0,002 633 4	187
2,15	0,001 729 1	153	2,69	0,002 652 2	188
2,16	0,001 744 5	154	2,70	0,002 671 0	188
2,17	0,001 759 9	154	2,71	0,002 689 9	189
2,18	0,001 775 4	155	2,72	0,002 708 9	190
2,19	0,001 791 0	156	2,73	0,002 728 0	191
2,20	0,001 806 7	157	2,74	0,002 747 1	191
2,21	0,001 822 4	157	2,75	0,002 766 3	192
2,22	0,001 838 2	158	2,76	0,002 785 5	192
2,23	0,001 854 0	158	2,77	0,002 804 8	193
2,24	0,001 869 9	159	2,78	0,002 824 2	194
2,25	0,001 885 9	160	2,79	0,002 843 6	194
2,26	0,001 902 0	161	2,80	0,002 863 1	195
2,27	0,001 918 1	161	2,81	0,002 882 7	196
2,28	0,001 934 2	161	2,82	0,002 902 3	196
2,29	0,001 950 4	162	2,83	0,002 922 0	197
2,30	0,001 966 7	163	2,84	0,002 941 7	197
2,31	0,001 983 1	164	2,85	0,002 961 5	198
2,32	0,001 999 5	164	2,86	0,002 981 4	199
2,33	0,002 016 0	165	2,87	0,003 001 3	199
2,34	0,002 032 6	166	2,88	0,003 021 3	200
2,35	0,002 049 2	166	2,89	0,003 041 4	201
2,36	0,002 065 8	166	2,90	0,003 061 5	201
2,37	0,002 082 5	167	2,91	0,003 081 7	202
2,38	0,002 099 3	168	2,92	0,003 101 9	202
2,39	0,002 116 2	169	2,93	0,003 122 2	203
2,40	0,002 133 2	170	2,94	0,003 142 6	204
2,41	0,002 150 2	170	2,95	0,003 163 0	204
2,42	0,002 167 3	171	2,96	0,003 183 5	205
2,43	0,002 184 4	171	2,97	0,003 204 1	206
2,44	0,002 201 6	172	2,98	0,003 224 7	206
2,45	0,002 218 9	173	2,99	0,003 245 4	207
2,46	0,002 236 2	173	3,00	0,003 266 1	207
2,47	0,002 253 6	174			
		174			

CHAPITRE TROISIÈME.

FORMULE POUR LES TUYAUX DE CONDUITE.

---

15. *Partage de la charge d'eau en deux parties.*

En appliquant les mêmes calculs au mouvement de l'eau dans les tuyaux, nous allons voir qu'une expression monôme de la résistance des parois satisfait aux expériences connues jusqu'à présent, non plus *aussi bien*, comme pour les canaux mais *bien mieux* que les expressions binômes.

Rappelons d'abord cette observation essentielle du judicieux Du Buat sur la manière dont on doit faire entrer, dans les calculs de ce genre, la *hauteur de charge* donnée par les expériences, et qui n'est autre chose que la différence de niveau mesurée depuis la surface de l'eau du réservoir supérieur qui alimente le tuyau, jusqu'à l'issue de ce tuyau s'il débouche dans l'air, ou jusqu'à la surface de l'eau du réservoir inférieur s'il débouche dans l'eau.

« Cette charge, dit Du Buat (*), est une force motrice qui peut être considérée comme divisée en deux parties, l'*une employée à imprimer la vitesse*, l'autre à vaincre la résistance qui naît du mouvement dans toute la longueur du tuyau. »

La première de ces deux parties de la charge serait

$$\frac{U^2}{2g},$$

(*) Principes d'hydraulique, t. I, art. 22.

U désignant la vitesse moyenne, et g la pesanteur, s'il n'y avait aucune contraction à la jonction du tuyau avec le réservoir. Mais, comme dans les expériences, l'entrée du tuyau n'était pas évasée, Du Buat prend

$$\frac{\left(\frac{U}{\mu}\right)^2}{2g},$$

μ étant un nombre un peu plus petit que l'unité, dont nous allons donner la valeur.

Il a bien soin de retrancher de la charge totale Z, donnée par le mesurage dans chacune de ses expériences, cette première partie $\frac{U^2}{\mu^2 . 2g}$ surmontant la *résistance d'inertie* du fluide, et dont la portion $\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\frac{U^2}{2g}$ est consommée à engendrer les tourbillonnements, suite inévitable de l'épanouissement rapide de la veine après sa contraction. C'est le surplus $Z - \frac{U^2}{2\mu^2 g}$ qui, divisé par la longueur du tuyau, donne à Du Buat cette *pente supposée* ou fictive appellé par lui $\frac{1}{b}$, qui, multipliée par le poids du fluide de l'unité de longueur du tuyau, donne la force faisant équilibre à la résistance des parois dans la même étendue, et qui joue dans les tuyaux le même rôle que la pente de superficie dans les canaux (*).

Cette déduction, opérée constamment par Du Buat, est parfaitement rationnelle. Elle est même

(*) Principes d'hydraulique, art. 22 et 25.

indispensable. On a peine à concevoir comment Prony a omis de l'opérer dans ses *Recherches*, où il prend constamment pour la pente J des tuyaux la charge *totale* divisée par la longueur. On conçoit encore moins comment, M. Eytelwein l'ayant rétablie (il est vrai, sans citer Du Buat) (*), l'illustre académicien n'y a vu qu'une innovation peu heureuse, introduite dans la vue de donner à une formule de pratique une exactitude exagérée et une généralité inutile (**). Sans doute, dans le plus grand nombre des cas des applications, où les tuyaux ont une longueur excessivement grande par rapport à leur diamètre, la hauteur $\frac{U^2}{\mu^2 . 2g}$ y relative est petite et négligeable devant la charge totale. Mais il n'en est nullement de même, comme il est bien facile de s'en assurer (***), lorsqu'il s'agit de construire une formule avec des expériences *dont plus de la moitié a été faite avec des tuyaux de 3 à 20 mèt. de longueur seulement*. Le second membre $aU + bU^2$ de la formule de M. de Prony relative aux tuyaux, avec les valeurs numériques qu'il a données aux coefficients, *ne peut donc nullement représenter la résistance des parois*, ou donner, même approximativement, ce qu'on appelle aujourd'hui d'une manière expressive la *perte de charge* due à leur

---

(*) Recherches sur le mouvement de l'eau en ayant égard à la contraction, etc., IX et X. Annales des mines, 1re série, t. XI.

(**) Recueil de cinq tables, introduction, § IV.

(***) On n'a pour cela qu'à comparer les nombres Z et Z' (colonnes 6e et 9e) du tableau de l'art. 17 ci-après, surtout vers le bas.

frottement. Cette formule n'est applicable, pour la pratique, ni aux tuyaux courts, *ni aux tuyaux longs*, car il est bien évident que, pour établir les calculs relatifs à ceux-ci comme à ceux-là, il faut tout au moins posséder, en fonction de la vitesse, une expression vraie de la résistance des parois, bien dégagée de la *résistance d'inertie*, qui s'y trouvait mêlée en proportion variable dans les expériences, et qui y était, disons-nous, comparable en grandeur dans la plupart d'entre elles (*).

Appelant donc :

Z (comme tout à l'heure) la charge totale, ou la différence de niveau de l'eau, de l'amont à l'aval ;

L la longueur du tuyau ;

D son diamètre, en sorte que $\frac{\pi D^2}{4}$ est la section et πD le périmètre mouillé ;

(*) Elle en était les 0,53, les 0,45, les 0,46, les 0,55, les 0,60 dans les expériences portant les numéros 47, 48, 49, 50, 51 aux tableaux Prony et à ceux ci-après (voir celui art. 17). Ces rapports de la partie de la charge employée à communiquer la vitesse U ou à vaincre l'inertie, et de la partie combattant la résistance des parois, ont été calculés (voyez ci-après) en faisant $\frac{1}{\mu^2} = 1,35$ pour les expériences 47, 48, 50, 51, et $\frac{1}{\mu^2} = 1,55$ pour celle 49. *Ils seraient généralement encore plus considérables en faisant, avec Du Buat et Eytelwein,* $\frac{1}{\mu^2} = 1,55$ pour toutes, car on aurait 0,58, 0,50, 0,45, 0,62, 0,67. Je le répète, la formule à coefficients Prony, calculés en négligeant de pareilles proportions toutes autres que celles qui ont ordinairement lieu entre les deux mêmes éléments dans les problèmes de pratique, doit être absolument abandonnée.

g la pesanteur;

Nous chercherons à représenter, comme pour les canaux, les expériences sur les tuyaux plus ou moins longs par une formule

(31) $$\frac{\pi D^2}{4} \frac{Z - \frac{U^2}{\mu^2 . 2g}}{L} = \pi D . cU^m,$$

ou

(32) $$\frac{DJ}{4} = cU^m,$$

c et m étant un coefficient et un exposant numériques à trouver, applicables à tous les tuyaux;

μ un autre coefficient numérique, également à déterminer, et *qui devra varier* d'une série d'expériences à une autre série d'expériences, faite avec d'autres tuyaux, dont l'entrée a des dispositions quelque peu différentes, donnant lieu à une autre contraction, ou dont le corps offre des particularités, telles que coudes ou étranglements, que n'offraient pas les premiers, et dont nous comprendrons l'influence dans la valeur de ce coefficient μ.

J le quotient de $Z - \frac{U^2}{2\mu^2 g}$ par L, ou la *perte de charge* due, par mètre courant de tuyau, au seul frottement de ses parois.

En sorte que le second membre cU^m soit bien, et uniquement, la résistance du frottement de l'unité superficielle des parois, en poids de l'unité de volume du fluide, ou (art. 1) la petite hauteur du prisme d'eau dont le poids est égal à l'intensité du frottement sur une surface de parois égale à sa base.

Nous nous servirons pour cela des 51 expériences de Du Buat, Bossut, Couplet, dont se sont servis MM. de Prony et Eytelwein, en en consultant quelques autres pour fixer les valeurs du coefficient μ dont nous allons nous occuper d'abord.

16. *Détermination du coefficient μ dont dépend la partie de la charge employée à vaincre l'inertie.*

Du Buat, et après lui Eytelwein, ont adopté la valeur $\mu = \frac{13}{16} = 0{,}8125$, d'où $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}515$, parce que, d'après Bossut, on a, sous une charge Z, une dépense d'eau $\frac{13}{16}\omega\sqrt{2gZ}$ par seconde à travers un orifice non évasé ω suivi d'un ajutage cylindrique; en sorte que la vitesse moyenne U de l'écoulement par cet ajutage est

$$\frac{13}{16}\sqrt{2gZ}, \quad \text{d'où} \quad Z = \frac{U^2}{\left(\frac{13}{16}\right)^2 \cdot 2g}.$$

Ce coefficient $\frac{13}{16}$ de Bossut résulte de ce que, d'après plusieurs de ses expériences, le rapport entre les dépenses d'eau qui ont lieu lorsque le liquide suit et lorsqu'il ne suit pas les parois des ajutages est celui de 13 à 16 (*), et que la dépense relative à ce second cas, étant supposée la même

(*) Hydrodynamique, t. II, ch. III, art. 493 à 497, et 520 à 526. Expériences III, V, VII, IX, XI comparées à IV, VI, VIII, X, XII.

que par un orifice en mince paroi sans ajutage, doit être $\frac{10}{16}\omega\sqrt{2gZ}$, d'après d'autres expériences faites par lui antérieurement (*). Les nombres simples 10, 13, 16, qu'il propose pour soulager la mémoire, ne sont qu'approchés (**).

Si, au lieu de déduire ainsi indirectement le coefficient de la dépense par les ajutages du coefficient de la dépense par les orifices en mince paroi, on le tire des chiffres mêmes des expériences de Bossut sur les ajutages, en se bornant à celles où les vitesses n'ont pas excédé 4 mètres (***), on trouve 0,787 au lieu de $\frac{13}{16} = 0,8125$. D'après d'autres expérimentateurs il faudrait prendre 0,82, et c'est ce chiffre qui est le plus adopté aujourd'hui.

Mais le coefficient μ de notre formule (31) de l'article précédent ne doit pas être tout à fait le même que celui dont il faut affecter $\sqrt{2gZ}$ pour avoir la vitesse U de l'écoulement par un ajutage ou tuyau court, car en appliquant à un tuyau quelconque cette formule que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g} = Z - \frac{4}{D}cU^m.L,$$

on prend toujours, pour L, la longueur totale du tuyau sans en retrancher une petite portion égale aux ajutages sur lesquels les expériences dont on vient de parler ont été faites. Il faut donc nécessai-

(*) Même ouvrage, ch. II, art. 460 à 473.

(**) *Idem*, art. 473, 497, 478, 527.

(***) *Idem*, art. 520 et 521. Expériences V, VII, IX, XI.

rement, pour tirer $\frac{1}{\mu^2}$ des résultats de ces expériences spéciales sur les ajutages ou tuyaux courts, déduire de la charge Z, avant de la diviser par $\frac{U^2}{2g}$, la valeur que peut avoir pour chaque ajutage le deuxième terme $\frac{4}{D}cU^m$. L du second membre de l'équation précédente, c'est-à-dire la petite *perte de charge* due au frottement ordinaire des parois d'une portion de tuyau égale en longueur à cet ajutage.

C'est ce qu'on a fait au tableau suivant, où J représente la *perte de charge* $\frac{4}{D}cU^m$ par unité de longueur. Nous l'avons évaluée en prenant (voyez ci-après) $c = 0{,}000296$, $m = \frac{12}{7}$. Cette déduction nous a permis de comprendre au tableau quatre expériences de Du Buat, faites sur des tuyaux de $0^m{,}65$ de longueur, avec une disposition à l'entrée probablement analogue à ce qui avait lieu pour ses tuyaux longs.

NOMS des AUTEURS.	NUMÉROS des expériences: aux articles 520 et 521 de Bossut.	NUMÉROS des expériences: à l'article 348 de Du Buat.	NUMÉROS des expériences: au troisième tableau de M. Eytelwein.	DIAMÈTRE du tuyau D	LONGUEUR du tuyau L	CHARGE d'eau mesurée Z	VITESSE moyenne U	PERTE DE CHARGES pour frottement ordinaire: par mètre courant $J = \frac{4}{D} \cdot 0{,}000296\, U^{\frac{12}{7}}$	PERTE DE CHARGES pour frottement ordinaire: pour la longueur L JL	Reste pour la charge $Z - JL$ communiquant la vitesse.	Coefficient $\frac{1}{\mu^2} = \frac{Z - JL}{\frac{1}{2g} U^2}$
				m	m.	m.	m.			m.	
Bossut. .	V	. . . . .	2	0,013535	0,05414	1,2452	3,8811	0,89710	0,04857	1,1966	1,5593
Id. . .	VII	. . . . .	4	0,02256	*Id.*	*Id.*	3,8893	0,54020	0,02925	1,2160	1,5771
Id. . .	IX	. . . . .	1	0,013535	*Id.*	0,6497	2,8077	0,51504	0,02788	0,6218	1,5475
Id. . .	XI	. . . . .	3	0,02256	*Id.*	*Id.*	2,8136	0,31011	0,01679	0,6329	1,5681
Du Buat .	. . . . .	79	. . . . .	0,02707	0,6497	0,2436	1,6038	0,09417	0,06118	0,1824	1,2954
Id. . .	. . . . .	80	. . . . .	*Id.*	*Id.*	0,4873	2,2978	0,18264	0,11866	0,3686	1,3692
Id. . .	. . . . .	81	. . . . .	*Id.*	*Id.*	0,7309	2,8820	0,26930	0,17496	0,5559	1,3129
Id. . .	. . . . .	82	. . . . .	*Id.*	*Id.*	0,9814	3,3197	0,34317	0,22296	0,7584	1,3502
Id. . .	. . . . .	83	. . . . .	*Id.*	0,10828	0,7332	3,2187	0,31868	0,03451	0,6987	1,3273

Nous n'avons pas compris à ce tableau les expériences I, II et III de Bossut (*), portant les n°s 7, 6, 5 au tableau Eytelwein, parce que les vitesses y sont de 7 mètres, ce qui est inusité dans les tuyaux de conduite, et ce qui, avec un tuyau de 0^m,02707 de diamètre, donnerait des pentes J de $\frac{5}{4}$ par notre formule cU^m, et de $\frac{2}{1}$ par celle d'Eytelwein $aU + bU^2$. Nous n'avons pas non plus rapporté les expériences 8 à 13 du tableau de M. Eytelwein, car elles ne sont pas de Bossut, quoique son nom se trouve en regard.

D'après la colonne $\frac{1}{\mu^2}$ (dernière colonne) du tableau qui précède, nous adopterons pour les expériences de Bossut (où le tuyau était soudé à un réservoir en fer-blanc dont l'orifice devait être à vive arête)

$$\frac{1}{\mu^2} = 1{,}55, \quad \text{ou environ} \quad \mu = 0{,}80;$$

et pour les expériences de Du Buat (où le tuyau partait d'une caisse en bois dont l'orifice avait apparemment des arêtes un peu arrondies ou formait comme un léger évasement à l'entrée de l'eau)

$$\frac{1}{\mu^2} = 1{,}35, \quad \text{ou environ} \quad \mu = 0{,}86.$$

Quant aux expériences de Couplet sur les conduites d'eau du parc de Versailles (**), plusieurs

(*) Hydrodynamique, art. 493.
(**) Mémoires de l'Académie des sciences, 1732; ou Architecture hydraulique de Belidor, liv. IV, chap. 2.

donnent, comme l'on sait, des résultats tellement divergents de ceux des autres, ainsi que des expériences de Bossut et de Du Buat, que celui-ci et M. de Prony n'ont pas cru pouvoir s'en servir pour établir leurs formules empiriques. Les sept qu'ils ont introduites dans leurs tableaux sont encore affectées, comme le remarque Du Buat, de plusieurs causes d'anomalies (*), car dans les tuyaux sur lesquels elles ont été exécutées, il y a des coudes, des points hauts sans ventouses où il a dû se cantonner de l'air, et des points bas où il y avait sans doute du limon amoncelé.

Un coude arrondi en quart de cercle d'un tiers de mètre de rayon ne fait perdre qu'une portion de charge égale aux 0,05 seulement de la hauteur due à la vitesse, d'après la formule par laquelle Navier représente les expériences de Du Buat sur les tournants. Mais les points hauts et bas où se trouvaient de l'air ou de la vase ont bien pu faire perdre autant de charge qu'un rétrécissement de moitié, suivi d'un élargissement rapide, c'est-à-dire une charge qui serait égale à $\frac{U^2}{2g}$ d'après le théorème de Borda. Nous prendrons en conséquence, en comptant $1,5\frac{U^2}{2g}$ pour la portion de charge employée à donner la vitesse :

Pour le tuyau de 5 pouces (*fig.* 3 de Couplet),

(*) Principes, art. 353. — M. Nepveu, architecte du château de Versailles, a bien voulu, en 1837, me citer des faits à l'appui de l'opinion que Du Buat s'était formée de l'état défectueux des conduites sur lesquelles Couplet a fait ses expériences.

expériences numérotées 2, 3, 5, 6, 7, 8 au tableau ci-après, $\frac{1}{\mu^2} = 2{,}5$.

Pour le tuyau de 18 pouces (*fig.* 4 de Couplet), expérience n° 43 ci-après, $\frac{1}{\mu^2} = 2$.

Au reste ces deux nombres un peu incertains n'ont qu'une faible influence, vu la grande longueur des tuyaux de Versailles.

17. *Détermination de la partie de la charge d'eau représentant la résistance des parois.*

Nous avons, en conséquence et avec les données puisées directement dans les écrits de nos trois expérimentateurs, dressé un premier tableau des charges mesurées Z, des vitesses U et des charges réduites ou des parties $Z - \frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g}$ de la charge totale Z (art. 15).

Nos valeurs de la vitesse U, pour les expériences portant les nos 19, 21, 25, 31, 33, 34, 37, 39, 42, 44, 45, 49, au tableau n° 2 des Recherches physico-mathématiques et à la table 3e du Recueil de cinq tables (voir notre tableau et celui de l'art. 20), sont plus fortes d'un peu plus de 1 p. 100 que les vitesses sur lesquelles Prony a fait ses calculs, parce que nous avons rétabli à 2 pouces, conformément aux art. 611 et 612 de l'Hydrodynamique de Bossut, le diamètre du tuyau que Prony a supposé, pour ces 12 expériences, de 2pouces,01, en copiant une faute d'impression du tableau de l'art. 55 de Du Buat, p. 74.

A l'expérience 5e, on a mis 0,122124 pour la vitesse observée, réduite en mètre, au lieu de 0,111718 qui est la suite d'une erreur dans la réduction des pouces en millimètres.

A l'expérience 43e, on a mis 3^m,93190 de charge au lieu des 3^m,92739 du tableau de Prony, parce que Couplet donne 145 pouces 1/4 et non 145 1/12.

Etc.

Pour ne pas excéder le format in-8°, nous n'avons pas compris dans ce tableau les longueurs et les diamètres; nous les avons rejetés au tableau de l'art. 20 ci-après. Nous devons dire d'avance, quant aux longueurs : 1° que nous avons changé légèrement celle donnée par Prony au tuyau des expériences 2, 3, 5, 6, 7, 8, parce que Couplet l'établit à 84259 pouces et non à 84240; 2° que nous avons pour les expériences 10 et 11, portant les n°s 53 et 52 à l'art. 55 de Du Buat, établi à 19^m,9509 ou 737 pouces la longueur du tuyau, bien que le mot *idem* des tableaux des Recherches et du Recueil de Prony semble indiquer une longueur de 138 pouces 1/2. Cette erreur, au reste, n'avait pas passé dans les calculs de Prony, ni dans ceux de M. Eytelwein.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES					HAUTEUR de la charge d'eau totale Z.	VITESSE moyenne U	$\frac{1}{\mu^2}$	Charge représentant la résistance des parois $Z - \frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g} = Z'$.
au recueil de cinq tables et aux recherches physico-mathématiques de Prony.	de Du Buat. à l'art. 85	de Du Buat. à l'art. 348	aux articles 609 à 613 et 632, 633, de Bossut.	au mémoire de Couplet, 3e et 4e profils.				
					m.	m.		m.
1	56	62		3e pr.	0,004060	0,043014	1,35	0,003933
2	88			2°	0,151132	0,054479	2,50	0,150686
3	87			3°	0,306784	0,085382	2,50	0,305865
4	55	63			0,013535	0,098074	1,35	0,012873
5	86			4°	0,453422	0,122124	2,50	0,451525
6	85			5°	0,570716	0,130115	2,50	0,568561
7	84			6°	0,649678	0,141175	2,50	0,647140
8	83			1° 7°	0,676749	0,144116	2,50	0,674104
9	54	73			0,018949	0,235211	1,35	0,015532
10	52	64			0,113694	0,282637	1,35	0,108198
11	53				0,113694	0,288863	1,35	0,107951
12	58		XXVIII		0,108280	0,330876	1,55	0,099628
13	70		VI		0,324839	0,340053	1,55	0,315701
14	51	65			0,160525	0,360437	1,35	0,151588
15	69		VI		0,324839	0,380766	1,55	0,313381
16	50	66			0,210604	0,409081	1,35	0,199087
17	68		IV		0,324839	0,436584	1,55	0,309779
18	49	67			0,242547	0,440807	1,35	0,229176
19	82		XVIII		0,324839	0,447921	1,55	0,308987
20	48	68			0,242547	0,450038	1,35	0.228611
21	81		XVII		0,324839	0,500626	1,55	0,305038
22	66		XII		0,649678	0,511514	1,55	0,629005
23	67		III		0,324839	0,512786	1,55	0,304063
24	47	69			0,333502	0,541155	1,35	0,313351
25	80		XVI		0,324839	0,566400	1,55	0,299492
26	46	70			0,370858	0,567657	1,35	0,348691
27	65		XI		0,649678	0,569335	1,55	0,632067
28	45	71			0,395221	0,594641	1,35	0,371131
29	57		XXIX		0,324839	0,603173	1,55	0,296095
30	64		II		0,324839	0,632354	1,55	0,293247
31	79		XV		0,324839	0,650980	1,55	0,291354
32	63		X		0,649678	0,649787	1,55	0,616316
33	78		XXIV		0,649678	0,676495	1,55	0,613529
34	77		XXIII		0,649678	9,751370	1,55	0,605069
35	62		IX		0,649678	0,759989	1,55	0,604041
36	44	72			0,641558	0,776068	1,35	0,600112
37	76		XIV		0,324839	0,799048	1,55	0,274393
38	43	74			0,162419	0,794259	1,35	0,118008
39	75		XXII		0,649678	0,845148	1,55	0,593240
40	61		I		0,324839	0,897639	1,55	0,261172
41	60		VIII		0,649678	0,933183	1,55	0,580874
42	74		XXI	4e pr.	0,649678	0,978274	1,55	0,574068
43	89			1°	3,93190	1,06004	2,00	3,817300
44	73		XIII		0,324839	1,102928	1,55	0,228693
45	72		XX		0,649678	1,176152	1,55	0,540372
46	59		VII		0,649678	1,31381	1,55	0,513247
47	42	76			0,487259	1,57845	1,35	0,317172
48	41	75			0,567116	1,59193	1,35	0,392669
49	71		XIX		0,649678	1,611166	1,55	0,444624
50	40	77			0,721864	1,93011	1,35	0,465607
51	39	78			0,974518	2,29946	1,35	0,610693

18. *Calculs pour obtenir l'exposant* m.

Nous avons donc calculé l'exposant m de l'équation (32) $\frac{DJ}{4} = cU^m$, ou plutôt le coefficient m de celle

$$\text{Log}\,\frac{DJ}{4} = \log c + m \log U,$$

en appliquant les méthodes Laplace, Legendre, Cauchy aux 51 logarithmes des valeurs de U du tableau que nous venons de donner, et aux logarithmes des 51 valeurs correspondantes de $\frac{DJ}{4}$, qui se trouvent, disons-nous, au tableau ci-après de l'art. 20.

Nous avons eu

$$\Sigma \log \frac{DJ}{4} = -207{,}08184, \quad \Sigma \log U = -15{,}79984,$$

et, par conséquent, pour les coordonnées du centre de gravité des $n = 51$ points ayant pour abscisses les log U et pour ordonnées les log $\frac{DJ}{4}$:

$$\frac{1}{n} \Sigma \log \frac{DJ}{4} = -4{,}06043, \quad \frac{1}{n} \Sigma \log U = -0{,}30980.$$

La méthode Laplace a donné, comme à l'art. 8, pour les expériences rangées suivant l'ordre des grandeurs décroissantes du rapport

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{l\frac{DJ}{4} - \frac{1}{n}\Sigma l \frac{DJ}{4}}{lU - \frac{1}{n}\Sigma lU},$$

cette série de numéros :

22, 19, 26..... 32, 41, 51, 30, 35, 46, 1, 14..... 20, 25, 18, 21,

dont le dernier, n° 21, désigne la seule expérience donnant $\frac{\eta}{\xi}$ négatif. La somme des 51 dénominateurs ξ pris positivement est

$$S_{+}\xi = 14,65792.$$

La moitié de cette somme n'est pas encore atteinte quand on n'additionne les valeurs absolues des ξ que jusqu'au n° 35 inclusivement, ce qui donne 7,24596. Elle est depassée quand on ajoute le n° 46, ce qui donne 7,67369. On a donc, d'après la méthode Laplace :

$$m = \text{le } \frac{\eta}{\xi} \text{ du n° } 46 = 1,72143.$$

La méthode Legendre donne

$$m = \frac{\Sigma\xi\eta}{\Sigma\xi^2} = \frac{12,91415}{7,51192} = 1,71936.$$

La méthode Cauchy

$$m = \frac{S\eta}{S_{+}\xi} = \frac{25,21810}{14,65792} = 1,72044.$$

Après avoir trouvé ces valeurs qui conviendraient s'il n'y avait pas d'erreurs sur les U, nous avons, comme à l'art. 9, appliqué les mêmes méthodes à la détermination de l'exposant $\frac{1}{m}$ de l'équation

$$(33) \qquad U = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{1}{m}}$$

afin de déterminer aussi les valeurs qui conviennent s'il n'y a pas d'erreurs sur les RI.

La méthode Laplace a donné une série inverse pour le rangement des expériences, excepté que celle 21, au lieu de se trouver désormais à la tête, est encore à la fin. La somme des 51 valeurs de η prises positivement étant

$$S_{+}\eta = 25{,}24114,$$

sa moitié n'est pas encore atteinte quand on n'additionne les valeurs absolues des η que jusqu'au n° 46, ce qui donne 12,36340, et elle est dépassée quand on ajoute le n° 35. On a donc, d'après la méthode Laplace, $\frac{1}{m}$ = le $\frac{\xi}{\eta}$ du n° 35, ou, en inversant,

$$m = \text{son } \frac{\eta}{\xi} = 1{,}73627.$$

La méthode de Legendre donne, en inversant également le résultat :

$$m = \frac{\Sigma\eta^2}{\Sigma\xi\eta} = \frac{22{,}24813}{12{,}91415} = 1{,}72277;$$

et la méthode Cauchy

$$m = \frac{S_{+}\eta}{S\xi} = \frac{25{,}24114}{14{,}63930} = 1{,}72420.$$

19. *Formule monôme pour les tuyaux.*

La presque égalité des diverses valeurs de m ainsi obtenues prouve que nous sommes très-près de notre but en adoptant l'une quelconque d'entre elles.

La moyenne des trois premières,

$$1,7204,$$

est peu éloignée de la fraction

$$\frac{12}{7} = 1,7143.$$

La moyenne des trois dernières,

$$1,7277,$$

est très-approchée de la fraction

$$\frac{19}{11} = 1,7273.$$

Il n'y a pas, entre ces deux limites, de fraction assez simple pour pouvoir être adoptée, en sorte qu'il convient de prendre $\frac{12}{7}$ ou $\frac{19}{11}$.

Comme tout le monde n'a pas l'habitude de faire des multiplications et des divisions par 19, ainsi qu'on les fait par un seul chiffre, et comme ce nombre 19 n'est pas décomposable en facteurs comme celui 21, que nous avons pris pour numérateur de l'exposant relatif aux canaux découverts, l'adoption, pour la formule des tuyaux, de l'exposant $\frac{19}{11}$ pourrait conduire à des calculs pénibles. Observons de plus que les erreurs sur les vitesses U ont dû être encore plus petites, comparativement aux erreurs sur $\frac{DJ}{4}$, dans les expériences sur les tuyaux, qu'elles ne l'ont été comparativement aux erreurs sur RI dans les expériences sur les canaux, *en sorte que la première valeur doit convenir plus que la seconde.*

Nous prendrons donc

$$m=\frac{12}{7},$$

qui se rapproche surtout de celle donnée par la méthode des moindres carrés.

Il en résulte $\log c = \frac{1}{n}\Sigma l \,.\, \text{RI} - \frac{12}{7}\,.\,\frac{1}{n}\Sigma l.\text{U} =$ $= -3{,}529341$, qui est le logarithme de 0,00029557.

En sorte qu'on a, pour représenter empiriquement le mouvement de l'eau dans les tuyaux, ou l'intensité du frottement de l'unité superficielle de leurs parois, en poids de l'unité de volume du fluide,

$$(34) \qquad \frac{\text{DJ}}{4} = 0{,}00029557\,\text{U}^{\frac{12}{7}},$$

d'où

$$(35) \qquad \text{U} = 114{,}494\left(\frac{\text{DJ}}{4}\right)^{\frac{7}{12}}.$$

20. *Vérification. Lignes figuratives. Observation sur la formule Prony.*

On peut voir à la *fig.* 3, où l'on a rapporté la suite des 51 points ayant pour abscisses et pour ordonnées les logarithmes des vitesses U et des produits $\frac{\text{DJ}}{4}$ fournis par l'expérience, que la loi qu'ils suivent est très-convenablement représentée par la ligne droite en pente de $\frac{12}{7}$ passant par leur centre de gravité. Une ligne droite en pente

de $\frac{2}{1}$ s'en écarte beaucoup plus que pour les canaux découverts; en sorte que les expériences sur les tuyaux sont encore moins susceptibles d'être représentées par une formule dont le second membre est réduit à bU^2.

Voici, pour obtenir une vérification plus directe des formules de l'article précédent, un tableau dont les 2ᵉ, 3ᵉ et 4ᵉ colonnes complètent, comme nous l'avons annoncé, ce qui manque à celui de l'art. 17, et dont les trois dernières colonnes donnent une comparaison entre les valeurs de la vitesse U fournies :

1° Par l'expérience;

2° Par la formule binôme de M. Eytelwein :

$$(36) \qquad \frac{DJ}{4} = 0{,}0000222\,36U + 0{,}00028032U^2;$$

3° Par notre formule monôme (34) ou (35).

On y voit que les résultats de celle-ci se rapprochent généralement bien plus de l'expérience et qu'elle est beaucoup plus propre à représenter les faits.

Numéros (de Prony).	DIAMÈTRE du tuyau D	LONGUEUR du tuyau L	PRODUIT DE LA PENTE $J = \frac{Z'}{L}$ ou de la perte de charge par mètre courant provenant de la résistance des parois sur le quart du diamètre $\frac{DJ}{4}$	VITESSES U observées	VITESSES U calculées par la formule binôme Eytelwein.	VITESSES U calculées par la formule monôme $\left(\frac{1}{c}\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$
1	0,027070	19,9506	0,000 001 334	0,043	0,040	0,0428
2	0,135350	2280,88	0,000 002 235	0,054	0,058	0,0579
3	0,135350	2280,88	0,000 004 538	0,085	0,093	0,0875
4	0,027070	19,9506	0,000 004 367	0,098	0,091	0,0856
5	0,135350	2280,88	0,000 006 698	0,122	0,120	0,1098
6	0,135350	2280,88	0,000 008 434	0,130	0,138	0,1256
7	0,135350	2280,88	0,000 009 600	0,141	0,150	0,1355
8	0,135350	2280,88	0,000 010 000	0,144	0,153	0,1387
9	0,027070	3,7492	0,000 028 036	0,235	0,279	0,2531
10	0,027070	19,9506	0,000 036 702	0,283	0,324	0,2962
11	0,027070	19,9506	0,000 036 618	0,289	0,324	0,2958
12	0,027070	16,2419	0,000 041 513	0,331	0,347	0,3182
13	0,036093	58,4711	0,000 048 719	0,340	0,373	0,3494
14	0,027070	19,9506	0,000 051 420	0,360	0,390	0,3605
15	0,036093	48,7258	0,000 058 034	0,381	0,417	0,3869
16	0,027070	19,9506	0,000 067 532	0,409	0,452	0,4227
17	0,036093	38,9807	0,000 077 708	0,437	0,467	0,4377
18	0,027070	19,9506	0,000 077 739	0,441	0,488	0,4588
19	0,054140	58,4711	0,000 071 526	0,448	0,467	0,4371
20	0,027070	19,9506	0,000 077 548	0,450	0,488	0,4582
21	0,054140	48,7258	0,000 084 732	0,501	0,511	0,4821
22	0,036093	58,4711	0,000 097 067	0,512	0,550	0,5223
23	0,036093	29,2355	0,000 093 844	0,513	0,540	0,5121
24	0,027070	19,9506	0,000 106 29	0,541	0,577	0,5507
25	0,054140	38,9807	0,000 103 99	0,566	0,570	0,5437
26	0,027070	19,9506	0,000 118 28	0,568	0,611	0,5861
27	0,036093	48,7258	0,000 117 05	0,569	0,608	0,5825
28	0,027070	19,9506	0,000 125 89	0,592	0,632	0,6078
29	0,027070	16,2419	0,000 123 37	0,603	0,624	0,6007
30	0,036093	19,4904	0,000 135 76	0,632	0,657	0,6352
31	0,054140	29,2355	0,000 134 88	0,651	0,655	0,6326
32	0,036093	38,9807	0,000 142 67	0,650	0,675	0,6538
33	0,054140	58,4711	0,000 142 02	0,676	0,673	0,6521
34	0,054140	48,7258	0,000 168 07	0,751	0,736	0,7194
35	0,036093	29,2355	0,000 186 43	0,760	0,777	0,7643
36	0,027070	19,9506	0,000 203 56	0,776	0,813	0,8045
37	0,054140	19,4904	0,000 190 55	0,799	0,785	0,7741
38	0,027070	3,7492	0,000 213 01	0,794	0,833	0,8261
39	0,054140	38,9807	0,000 205 99	0,845	0,811	0,8101
40	0,036093	9,7452	0,000 241 83	0,898	0,890	0,8895
41	0,036093	19,4904	0,000 268 92	0,933	0,940	0,9464
42	0,054140	29,2355	0,000 265 77	0,978	0,935	0,9399
43	0,487259	1169,42	0,000 397 64	1,060	1,152	1,1889
44	0,054140	9,7452	0,000 317 63	1,103	1,025	1,0429
45	0,054140	19,4903	0,000 375 26	1,176	1,118	1,1494
46	0,036093	9,7452	0,000 475 24	1,314	1,263	1,3192
47	0,027070	3,1672	0,000 677 70	1,578	1,516	1,6226
48	0,027070	3,7492	0,000 708 79	1,592	1,550	1,6656
49	0,054140	9,7452	0,000 647 53	1,611	1,445	1,5370
50	0,027070	3,1672	0,000 994 88	1,930	1,845	2,0299
51	0,027070	3,1672	0,000 304 88	2,299	2,118	2,3779

On s'en convainc davantage en construisant, à la manière de Prony, la suite des points ayant pour abscisses les valeurs de U et pour ordonnées les valeurs de $\frac{\frac{1}{4}DJ}{U}$ données par l'expérience ou déterminées par nos tableaux (*fig.* 5) (*), et en traçant sur la même figure la courbe représentée par notre équation (34) écrite ainsi :

$$\frac{DJ}{4U} = 0{,}00029557\,U^{\frac{8}{7}}.$$

On reconnaît que la courbe passe bien entre les points de manière à représenter très-convenablement leur ensemble sans reproduire leurs évidentes anomalies.

On reconnaît aussi que la suite de ces points affecte une courbure générale très-prononcée, avec concavité tournée vers l'axe des abscisses U, en sorte qu'on ne saurait remplacer cette suite

(*) Voici la suite des valeurs de $\frac{\frac{1}{4}DJ}{U}$ multipliées par 1000 :

Numéros.	$1000\,\frac{DJ}{4U}$	Numéros.	$1000\,\frac{DJ}{4U}$	Numéros.	$1000\,\frac{DJ}{4U}$	Numéros.	$1000\,\frac{DJ}{4U}$	Numéros.	$1000\,\frac{DJ}{4U}$
1	0,0310	12	0,1255	23	0,1830	34	0,2237	45	0,3191
2	0,0410	13	0,1433	24	0,1964	35	0,2453	46	0,3617
3	0,0531	14	0,1427	25	0,1836	36	0,2623	47	0,4293
4	0,0445	15	0,1524	26	0,2084	37	0,2385	48	0,4452
5	0,0548	16	0,1651	27	0,2056	38	0,2682	49	0,3833
6	0,0648	17	0,1642	28	0,2128	39	0,2437	50	0,5155
7	0,0680	18	0,1764	29	0,2045	40	0,2694	51	0,5675
8	0,0694	19	0,1597	30	0,2147	41	0,2882		
9	0,1192	20	0,1723	31	0,2072	42	0,2717		
10	0,1299	21	0,1693	32	0,2196	43	0,3751		
11	0,1268	22	0,1898	33	0,2100	44	0,2880		

par une ligne droite d'une manière suffisamment approchée. Par exemple, la droite qui résulte de l'équation (36) de M. Eytelwein, divisée par U, passe évidemment trop au-dessus des points répondant aux plus grandes valeurs de RI, tels que ceux des expériences 46, 47, 49, 50, 51, et trop au-dessous des points répondant aux valeurs médiocres, tels que ceux des expériences 9, 10, 13, 17, 22, 24, 27, 28, etc. (*).

Nous ne parlons pas de la ligne droite résultant de l'équation Prony $\frac{DJ}{4U} = 0{,}00001733 + 0{,}0003483U$. Elle s'élève énormément au-dessus de tous les points passé celui n° 20, en sorte que la formule de Prony pour les tuyaux ne représente absolument rien et ne peut être d'aucune utilité.

Une remarque va nous expliquer comment il a pu se faire qu'on l'ait employée aussi longtemps et qu'on en ait même fait encore récemment la base du calcul de tables usuelles étendues, malgré les erreurs où elle entraîne.

L'ensemble des points offre, disons-nous, une courbe concave vers l'axe des U. Si donc on les rehausse tous en augmentant leurs ordonnées $\frac{DJ}{4U}$

(*) Cette droite s'écarte encore plus des points 47, 50, 51 quand, au lieu de prendre, comme nous avons fait, $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}35$ pour les expériences de Du Buat, on prend, avec le même M. Eytelwein, $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}5148$; en sorte que l'ensemble des points construits avec ses données offre encore plus de courbure que l'ensemble de nos points.

d'une manière progressive, ou de manière que les plus grandes ordonnées reçoivent une augmentation proportionnellement plus considérable, il est évident que la courbure diminuera et pourra même s'effacer de manière que l'ensemble devienne à peu près rectiligne. Or c'est ce qui arrive si l'on remplace nos points par ceux de M. de Prony construits en prenant pour les valeurs de J, non pas celles de $\frac{1}{L}\left(Z-\frac{U^2}{2\mu^2 g}\right)$, mais celles de $\frac{Z}{L}$, comme il a fait. De cette plus grande facilité de représenter par une formule binôme $\frac{DJ}{4U}=a+bU$ les points de M. de Prony que ceux de M. Eytelwein ou les nôtres, on ne doit rien inférer en faveur de la formule Prony pas plus qu'en faveur de la forme binôme de son second membre. C'est un effet du pur hasard; cela n'empêche pas la ligne brisée des points construits par M. de Prony d'être plus sinueuse que la nôtre, et la formule $\frac{DJ}{4}=aU+bU^2$, représentant la ligne droite tracée à travers ces points, de faire une sorte de mélange de deux portions de la charge fort distinctes, et ayant varié relativement l'une à l'autre en toute proportion depuis 1/3 p. 100 *jusqu'à* 60 *p.* 100 *dans les expériences*, comme on peut le voir par les colonnes 6e et 9e, ou Z et $Z-\frac{U^2}{2\mu^2 g}$, du tableau de l'art. 17, et qui eût donné jusqu'à 67 p. 100 si l'on avait pris la valeur de $\frac{1}{\mu^2}$ adoptée par d'autres auteurs. Une pareille formule n'a aucune signification physico-mathématique; elle doit in-

duire dans de graves mécomptes lorsque ces deux parties de la charge, si bien distinguées par Du Buat, sont entre elles dans une autre proportion que dans une sorte de moyenne des expériences. Elle doit donc être tout à fait abandonnée.

La courbure de l'ensemble des points ayant pour coordonnées les U et les $\frac{DJ}{4U}$, et les valeurs 1,719 à 1,736 que nous avons trouvées pour l'exposant m par diverses méthodes, ne prouvent pas moins qu'il convient d'abandonner aussi, pour les tuyaux, la formule $\frac{DJ}{4} = aU + bU^2$ avec les coefficients Eytelwein ou d'autres quelconques (*).

(*) Notamment avec le coefficient $a = 0$.

Une formule monôme du second degré $b'U^2$ représente plus mal les expériences sur les tuyaux que les expériences sur les canaux, malgré l'opinion contraire.

Il est bien facile de voir qu'on ne peut pas tirer, par l'origine des coordonnées U et $\frac{DJ}{4U}$, une ligne droite se rapprochant suffisamment des points pour pouvoir en représenter l'ensemble.

On peut voir aussi (*fig.* 3) que l'ensemble de ceux ayant pour ordonnées les valeurs de log U et log $\frac{DJ}{4}$ fournies par les 51 expériences peut bien être représenté par des droites faisant avec l'axe des abscisses des angles dont la tangente soit entre 1,70 et 1,75, mais qu'il est impossible de porter cette tangente jusqu'à 2.

Au reste le coefficient c, qui conviendrait à cette valeur $m = 2$ de l'exposant, aurait, d'après nos valeurs de $\frac{1}{n}\Sigma l U$ et $\frac{1}{n}\Sigma \frac{DJ}{4}$ de l'art. 14, pour logarithme $-\bar{3},44083$. La formule serait donc

Si l'on voulait donc continuer de se servir d'une formule contenant un terme affecté de la première puissance de U, dans la persuasion où l'on serait, d'après quelques expériences indirectes de Coulomb (*), que, pour les très-petites vitesses telles que 1, 2, 3 centimètres, la résistance des parois doit être proportionnelle à ces vitesses, il serait nécessaire d'ajouter un terme ou de prendre, pour les tuyaux, une expression telle que $\frac{DJ}{4} = aU + bU^2 - cU^3$ (**).

Mais si, comme il paraît convenable, on se tient dans les limites des expériences spéciales rapportées ci-dessus, dont aucune n'a porté sur des vitesses au-dessous de 4 centimètres par seconde, on voit que l'on peut, avec toute l'approximation désirable, se servir de notre formule monôme infiniment plus commode (voyez art. 30) :

$$\frac{DJ}{4} = 0{,}0003624U^2, \qquad \text{d'où} \quad U = 26{,}26\sqrt{DJ}.$$

M. Eytelwein prend $0{,}00035U^2$.

M. Courtois indique $0{,}0004U^2$ comme pour les canaux, en prenant, comme Prony, $\frac{Z}{L}$ pour J.

(*) Mémoires de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut, t. III.

(**) Le calcul des coefficients *a*, *b*, *c* pourrait s'effectuer par la méthode des moindres carrés, ou bien plus simplement et à peu près aussi exactement par la méthode de M. Cauchy (Journal Liouville, 1837). Il conviendrait de diviser tous les termes par $\frac{1}{4}DJ$, afin de corriger des écarts *proportionnels* (art. 4, 2e note).

$$\frac{D\left(Z - \frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g}\right)}{4L} = \frac{DJ}{4} = 0,0002\text{9}6U^{\frac{12}{7}}; \text{ ou } U = 114,5\left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$$

qui peut servir facilement, même lorsque c'est U qu'il s'agit de déterminer ; car une première approximation obtenue en négligeant $-\frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g}$ devant Z donnera une valeur provisoire de U, qui servira à évaluer d'une manière suffisamment approchée ce terme déductif $-\frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g}$, souvent négligeable dans les applications, *bien qu'il ne le fût nullement dans les conclusions à tirer des expériences de Bossut et de Du Buat.*

21. *Table usuelle pour le mouvement de l'eau dans les tuyaux.*

Nous donnons une table des valeurs de $\frac{DJ}{4}$ calculées par notre formule, pour toutes celles de la vitesse moyenne U, de 0,04 à 4 mètres.

On peut, par la comparaison avec la table de Prony que l'on trouve partout, reconnaître, comme par la *fig.* 5, les différences considérables dont nous avons parlé.

MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE.

Table des valeurs de $\frac{DJ}{4} = \frac{D}{4} \cdot \frac{Z - \frac{1}{\mu^2}\frac{U^2}{2g}}{L}$, *ou du produit du quart du diamètre* D *et de la* pente fictive J *ou* perte de charge *par mètre courant due au frottement des parois calculées par la formule*

$$1/4\,DJ = 0{,}00029587\,U^{\frac{12}{7}},$$

ou Table donnant, pour chaque grandeur de la vitesse moyenne U, *la petite hauteur du prisme fluide dont le poids mesure le frottement de l'eau sur une surface égale à sa base.*

Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.	Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.
m.	m.		m.	m.	
0,04	0,000 001 19		0,41	0,000 064 10	266
0,05	0,000 001 74	55	0,42	0,000 066 81	271
0,06	0,000 002 38	64	0,43	0,000 069 56	275
0,07	0,000 003 10	72	0,44	0,000 072 35	279
0,08	0,000 003 89	79	0,45	0,000 075 19	284
0,09	0,000 004 76	87	0,46	0,000 078 08	289
0,10	0,000 005 71	95	0,47	0,000 081 01	293
0,11	0,000 006 72	101	0,48	0,000 083 99	298
0,12	0,000 007 80	108	0,49	0,000 087 01	302
0,13	0,000 008 95	115	0,50	0,000 090 08	307
0,14	0,000 010 16	121	0,51	0,000 093 19	311
0,15	0,000 011 43	127	0,52	0,000 096 34	315
0,16	0,000 012 77	134	0,53	0,000 099 54	320
0,17	0,000 014 17	140	0,54	0,000 102 78	324
0,18	0,000 015 63	145	0,55	0,000 106 06	328
0,19	0,000 017 15	152	0,56	0,000 109 39	333
0,20	0,000 018 72	157	0,57	0,000 112 76	337
0,21	0,000 020 36	164	0,58	0,000 116 17	341
0,22	0,000 022 05	169	0,59	0,000 119 63	346
0,23	0,000 023 80	175	0,60	0,000 123 13	350
0,24	0,000 025 60	180	0,61	0,000 126 67	354
0,25	0,000 027 45	185	0,62	0,000 130 25	358
0,26	0,000 029 36	191	0,63	0,000 133 87	362
0,27	0,000 031 32	196	0,64	0,000 137 53	366
0,28	0,000 033 33	201	0,65	0,000 141 23	370
0,29	0,000 035 40	207	0,66	0,000 144 97	374
0,30	0,000 037 52	212	0,67	0,000 148 76	379
0,31	0,000 039 69	217	0,68	0,000 152 59	383
0,32	0,000 041 91	222	0,69	0,000 156 46	387
0,33	0,000 044 18	227	0,70	0,000 160 37	391
0,34	0,000 046 50	232	0,71	0,000 164 31	394
0,35	0,000 048 87	237	0,72	0,000 168 30	399
0,36	0,000 051 29	242	0,73	0,000 172 33	403
0,37	0,000 053 76	247	0,74	0,000 176 40	407
0,38	0,000 056 27	251	0,75	0,000 180 50	410
0,39	0,000 058 83	256	0,76	0,000 184 65	415
0,40	0,000 061 44	261			418
		266			

Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.	Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.
m.	m.	418	m.	m.	62
0,77	0,000 188 83	423	1,33	0,000 481 9	63
0,78	0,000 193 06	426	1,34	0,000 488 2	62
0,79	0,000 197 32	431	1,35	0,000 494 4	63
0,80	0,000 201 62	434	1,36	0,000 500 7	63
0,81	0,000 205 96	438	1,37	0,000 507 0	64
0,82	0,000 210 34	441	1,38	0,000 513 4	64
0,83	0,000 214 75	446	1,39	0,000 519 8	64
0,84	0,000 219 21	449	1,40	0,000 526 2	65
0,85	0,000 223 70	453	1,41	0,000 532 7	65
0,86	0,000 228 23	457	1,42	0,000 539 2	65
0,87	0,000 232 80	461	1,43	0,000 545 7	66
0,88	0,000 237 41	464	1,44	0,000 552 3	66
0,89	0,000 242 05	468	1,45	0,000 558 9	66
0,90	0,000 246 73	472	1,46	0,000 565 5	66
0,91	0,000 251 45	475	1,47	0,000 572 1	67
0,92	0,000 256 20	479	1,48	0,000 578 8	67
0,93	0,000 260 99	483	1,49	0,000 585 5	68
0,94	0,000 265 82	487	1,50	0,000 592 3	68
0,95	0,000 270 69	490	1,51	0,000 599 1	68
0,96	0,000 275 59	494	1,52	0,000 605 9	68
0,97	0,000 280 53	498	1,53	0,000 612 7	69
0,98	0,000 285 51	501	1,54	0,000 619 6	69
0,99	0,000 290 52	505	1,55	0,000 626 5	70
1,00	0,000 295 57	51	1,56	0,000 633 5	70
1,01	0,000 300 7	51	1,57	0,000 640 5	70
1,02	0,000 305 8	51	1,58	0,000 647 5	70
1,03	0,000 310 9	52	1,59	0,000 654 5	71
1,04	0,000 316 1	52	1,60	0,000 661 6	71
1,05	0,000 321 3	53	1,61	0,000 668 7	71
1,06	0,000 326 6	53	1,62	0,000 675 8	72
1,07	0,000 331 9	54	1,63	0,000 683 0	72
1,08	0,000 337 3	53	1,64	0,000 690 2	72
1,09	0,000 342 6	54	1,65	0,000 697 4	73
1,10	0,000 348 0	55	1,66	0,000 704 7	73
1,11	0,000 353 5	55	1,67	0,000 712 0	73
1,12	0,000 359 0	55	1,68	0,000 719 3	73
1,13	0,000 364 5	55	1,69	0,000 726 6	74
1,14	0,000 370 0	56	1,70	0,000 734 0	74
1,15	0,000 375 6	56	1,71	0,000 741 4	75
1,16	0,000 381 2	57	1,72	0,000 748 9	75
1,17	0,000 386 9	57	1,73	0,000 756 4	75
1,18	0,000 392 6	57	1,74	0,000 763 9	75
1,19	0,000 398 3	57	1,75	0,000 771 4	76
1,20	0,000 404 0	58	1,76	0,000 779 0	76
1,21	0,000 409 8	58	1,77	0,000 786 6	76
1,22	0,000 415 6	59	1,78	0,000 794 2	77
1,23	0,000 421 5	59	1,79	0,000 801 9	77
1,24	0,000 427 4	59	1,80	0,000 809 6	77
1,25	0,000 433 3	60	1,81	0,000 817 3	78
1,26	0,000 439 3	59	1,82	0,000 825 1	78
1,27	0,000 445 2	61	1,83	0,000 832 9	78
1,28	0,000 451 3	61	1,84	0,000 840 7	78
1,29	0,000 457 4	60	1,85	0,000 848 5	79
1,30	0,000 463 4	62	1,86	0,000 856 4	79
1,31	0,000 469 6	61	1,87	0,000 864 3	79
1,33	0,000 475 7	62	1,88	0,000 872 2	80

Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.
m.	m.	80
1,89	0,000 880 2	80
1,90	0,000 888 2	81
1,91	0,000 896 3	80
1,92	0,000 904 3	81
1,93	0,000 912 4	81
1,94	0,000 920 5	82
1,95	0,000 928 7	82
1,96	0,000 936 9	82
1,97	0,000 945 1	82
1,98	0,000 953 3	83
1,99	0,000 961 6	83
2,00	0,000 969 9	83
2,01	0,000 978 2	84
2,02	0,000 986 6	83
2,03	0,000 994 9	85
2,04	0,001 003 4	84
2,05	0,001 011 8	85
2,06	0,001 020 3	85
2,07	0,001 028 8	85
2,08	0,001 037 3	86
2,09	0,001 045 9	86
2,10	0,001 054 5	86
2,11	0,001 063 1	86
2,12	0,001 071 7	87
2,13	0,001 080 4	87
2,14	0,001 089 1	88
2,15	0,001 097 9	87
2,16	0,001 106 6	88
2,17	0,001 115 4	89
2,18	0,001 124 3	88
2,19	0,001 133 1	89
2,20	0,001 142 0	89
2,21	0,001 150 9	90
2,22	0,001 159 9	90
2,23	0,001 168 9	89
2,24	0,001 177 8	91
2,25	0,001 186 9	90
2,26	0,001 195 9	91
2,27	0,001 205 0	91
2,28	0,001 214 1	92
2,29	0,001 223 3	92
2,30	0,001 232 5	92
2,31	0,001 241 7	92
2,32	0,001 250 9	92
2,33	0,001 260 1	93
2,34	0,001 269 4	93
2,35	0,001 278 7	94
2,36	0,001 288 1	93
2,37	0,001 297 4	94
2,38	0,001 306 8	95
2,39	0,001 316 3	94
2,40	0,001 325 7	95
2,41	0,001 335 2	95
2,42	0,001 344 7	96
2,43	0,001 354 3	95
2,44	0,001 363 8	96

Vitesse U.	VALEUR de 1/4 DJ.	Différences.
m.	m.	
2,45	0,001 373 4	96
2,46	0,001 383 1	97
2,47	0,001 392 7	96
2,48	0,001 402 4	97
2,49	0,001 412 1	97
2,50	0,001 421 9	98
2,51	0,001 431 6	97
2,52	0,001 441 4	98
2,53	0,001 451 2	98
2,54	0,001 461 0	98
2,55	0,001 470 9	99
2,56	0,001 480 8	99
2,57	0,001 490 7	99
2,58	0,001 500 7	100
2,59	0,001 510 7	100
2,60	0,001 520 7	100
2,61	0,001 530 7	100
2,62	0,001 540 8	101
2,63	0,001 550 9	101
2,64	0,001 561 0	101
2,65	0,001 571 2	102
2,66	0,001 581 3	102
2,67	0,001 591 5	102
2,68	0,001 601 8	103
2,69	0,001 612 1	103
2,70	0,001 622 4	103
2,71	0,001 632 7	103
2,72	0,001 643 0	103
2,73	0,001 653 4	104
2,74	0,001 663 8	104
2,75	0,001 674 2	104
2,76	0,001 684 6	104
2,77	0,001 695 1	105
2,78	0,001 705 6	105
2,79	0,001 716 2	106
2,80	0,001 726 7	105
2,81	0,001 737 3	106
2,82	0,001 747 9	106
2,83	0,001 758 5	106
2,84	0,001 769 2	107
2,85	0,001 779 9	107
2,86	0,001 790 6	107
2,87	0,001 801 4	108
2,88	0,001 812 1	107
2,89	0,001 822 9	108
2,90	0,001 833 7	108
2,91	0,001 844 6	109
2,92	0,001 855 5	109
2,93	0,001 866 4	109
2,94	0,001 877 3	109
2,95	0,001 888 3	110
2,96	0,001 899 2	109
2,97	0,001 910 3	111
2,98	0,001 921 3	110
2,99	0,001 932 4	111
3,00	0,001 943 5	111

CHAPITRE IV.

QUELQUES APPLICATIONS DES NOUVELLES FORMULES A SECOND MEMBRE MONÔME. — FORMES ET DIMENSIONS DES SECTIONS. —DIAMÈTRES DES CONDUITES.—SÉPARATION OU RÉUNION DES ÉCOULEMENTS D'EAU. — RELÈVEMENTS OU REMOUS EN AMONT DES BARRAGES.

---

§ 1er. Avantage pratique des nouvelles formules.

22. *Tables hydrauliques suppléables par une table de logarithmes.*

On sait que l'on peut résoudre un grand nombre de problèmes sur les eaux courantes en employant des tables hydrauliques comme celles que nous avons données articles 14 et 21, tables qui pourraient être construites sans formule, en opérant directement la correction mutuelle des anomalies sur les résultats numériques des expériences; mais que l'on préfère dresser au moyen des formules empiriques, afin d'avoir les mêmes nombres, soit qu'on se serve des formules ou des tables.

Mais on n'a pas toujours de tables hydrauliques sous la main, et alors la valeur de U en $\frac{\omega}{\chi}I$ ne s'obtient que péniblement de la formule binôme qui donne

$$U = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}\frac{\omega}{\chi}I},$$

tandis que la formule monôme donne pour U une expression calculable promptement avec une pe-

tite table de logarithmes que l'on trouve partout.

A ce seul point de vue, la formule monôme serait avantageuse, indépendamment de ce qu'elle est la seule conforme aux expériences sur les tuyaux.

23. *Avantage plus grand des formules monômes pour certains problèmes.*

Mais il y a, comme nous avons dit (art. 1), des problèmes que l'on ne peut résoudre à l'aide des tables de U et $\frac{\omega}{\chi}$I sans faire des tâtonnements réitérés et très-longs. Nous avons recherché, dans les divers ouvrages publiés depuis celui de Prony, ces problèmes pour la solution desquels leurs auteurs ne conservent que le deuxième terme du second membre de la formule connue, en le réduisant à bU^2, et nous avons reconnu que toutes ces solutions et d'autres encore, sont aussi faciles au moyen de nos formules plus exactes à second membre $cU^{\frac{21}{11}}$ ou $cU^{\frac{12}{7}}$, sauf la petite peine de multiplier les logarithmes de U et de $\frac{\omega}{\chi}$I par des nombres un peu plus complexes, tels que $\frac{21}{11}$, $\frac{7}{12}$, $1+\frac{21}{11}=3-\frac{1}{11}$, au lieu de 2, $\frac{1}{2}$, 3.

Nous allons en donner quatre exemples.

Le premier, qui s'offre très-fréquemment dans les applications, est l'envoi le plus économique, par un canal, d'un volume d'eau déterminé sous une pente donnée.

Le second, l'envoi, aussi le moins coûteux, de

quantités d'eau déterminées par des tuyaux dont on demande de donner les diamètres.

Le troisième, la comparaison des avantages de la séparation et de la réunion de deux écoulements d'eau d'un marais, ou de deux conduites d'eau d'une ville.

Le quatrième, sur lequel nous nous arrêterons en raison de sa grande importance pratique, est la détermination du *remous* ou gonflement produit jusqu'à une grande distance en amont d'un barrage établi sur un cours d'eau.

§ 2. Détermination prompte des diverses largeurs et profondeurs qui peuvent être données à un canal trapèze pour transporter une quantité d'eau donnée sous une pente donnée, afin de choisir celles qui satisfont, dans chaque cas, au maximum d'économie.

24. *Problème. Condition de l'économie.*

Il s'agit d'établir avec le moins de dépense possible un canal trapèze qui transporte, en suivant un tracé donné en pente uniforme, un volume d'eau déterminé.

Soient toujours U la vitesse moyenne, ω la section, χ le périmètre mouillé, $R=\frac{\omega}{\chi}$, I la pente par mètre. Soient de plus :

$Q=\omega U$ le volume à débiter par seconde;

h la hauteur ou profondeur d'eau dans le canal;

l sa largeur au plafond;

t le rapport de la base à la hauteur de ses talus.

Q et I sont les données du problème. On con-

naît aussi le *talus* t, par la nature du terrain. Il s'agit de déterminer l, h, et, par suite,

$$(37) \qquad \omega = h(l + ht),\ U = \frac{Q}{\omega},\ \chi = l + 2ht'$$

(en faisant $\sqrt{1+t^2} = t'$).

Si, en attribuant à l'une des deux quantités ω et χ une certaine grandeur, la connaissance de l'autre s'ensuivait *à priori*, et s'en déduisait facilement, comme l'ont supposé quelques auteurs et comme le supposent quelquefois les ingénieurs qui, « pour faire cesser l'indétermination du problème se donnent la figure du profil » (*), le problème se résoudrait facilement par un petit nombre de tâtonnements, en se servant seulement de la table des valeurs correspondantes de RI et de U de l'art. 14.

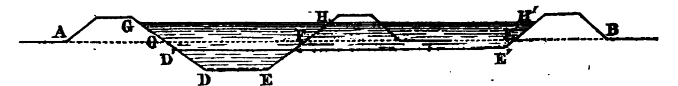
C'est ce qui aurait lieu si, par exemple, la partie ω de la cuvette du canal, contenant l'eau, était constamment *tout en déblai*, et *constituait tout le déblai*, auquel la dépense d'exécution, à rendre un minimum, fût supposée proportionnelle, car cette condition du minimum donnerait $l = 2h(t'-t)$, d'où la relation $\chi^2 = 4\omega(2t - t')$ entre ω et χ (**).

(*) D'Aubuisson. Hydraulique, p. 136.

(**) En effet, il faudrait donner à la section trapèze une forme telle que, pour une surface déterminée ω, elle eût le plus grand rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$, ou telle que le périmètre χ fût le plus petit possible pour ω constant, ou ω le plus grand pour χ constant.

M. d'Aubuisson résout simplement cette question de pure géométrie (Hydraulique, art. 121, p. 138) en remarquant que l'une des deux quantités $\omega = h(l + ht)$,

On aurait une solution toute différente, mais aussi facile si, en supposant toujours la dépense proportionnelle au déblai de la cuvette, on tenait compte de ce que l'eau d'un canal est contenue non-seulement entre les parois de ce déblai, mais aussi entre les deux levées latérales que l'on forme avec les terres qui en proviennent. Ces levées de remblai, trapézoïdales comme la cuvette, ont en couronne une largeur généralement constante, quelle que soit leur distance, ou quelle que soit la largeur du canal. Leur hauteur au-dessus du terrain naturel, supposé avoir une pente longitunale égale à celle du canal et une coupe transversale de niveau, dépend donc de la superficie du déblai ; en sorte qu'on aurait, pour même déblai, une section d'eau d'autant plus grande qu'on éloignerait davantage les deux levées. Si, par exemple, CDEF, CD'E'F' sont deux sections de déblai égales en superficie, creusées l'une et l'autre



dans un terrain dont le profil transversal est l'horizontale AB, la section d'eau GD'E'H' donnée

---

$\chi = l + 2ht'$, devant être constante pendant que l'autre est un maximum ou un minimum, leurs différentielles doivent être nulles en même temps, ce qui donne :

$$hdl + ldh + 2htdh = 0\,,\ dl + 2t'dh = 0,$$

d'où l'on tire $l = 2h\,(t' - t)$, en éliminant dh et dl.

Tout trapèze jouissant de cette propriété de la plus grande surface pour la plus petite somme de sa base inférieure et des deux côtés adjacents d'une inclinaison déterminée, est circonscrit à un demi-cercle ayant son centre au milieu de la base supérieure.

par la seconde, qui est plus large, surpasse celle GDEH donnée par la première, de tout le parallélogramme FHH'F' représentant l'espace gagné par l'éloignement de la levée de droite. D'où il suit que le cube de terrassement à faire pour établir sur un pareil terrain le canal débitant un volume d'eau donné, serait un minimum, en faisant la section d'eau du canal infiniment large, au moyen d'un déblai infiniment peu profond, servant à construire deux levées infiniment distantes (*).

25. *Sa solution dépend de la recherche préalable de nombreux systèmes de valeurs conjuguées de la largeur et de la profondeur, donnant le débit voulu.*

Mais la dépense d'un canal se compose d'autres éléments que le volume des terres à déblayer. Leur

---

(*) On peut le prouver ainsi par le calcul. Supposons pour plus de simplicité que les parois du canal et les côtés des levées soient des plans verticaux : soient x la section du déblai, z sa profondeur, k la hauteur, au-dessus de l'eau, du sommet des levées, auxquelles on suppose une largeur a chacune, on aura, comme le remblai doit égaler le déblai, les trois équations :

$$2a(h+k-z)=l\times z,\ l\times z=x,\ \frac{hl}{l+2h}\,\mathrm{I}=c\left(\frac{Q}{hl}\right)^{m}.$$

Éliminant l, puis différenciant par rapport à z en égalant à zéro la différentielle de x qui doit être un minimum, et éliminant ensuite $\frac{dh}{dz}$, on a des équations qui sont satisfaites par $z=0$, $x=2ak$, $l=\frac{2ak}{z}=\infty$. Les autres valeurs qu'on peut en tirer sont étrangères à la question.

transport transversal, qui croît avec la largeur, et aussi *le prix du terrain occupé* y ont une grande part.

Et puis ce terrain n'offre jamais une coupe longitudinale rectiligne et parallèle à la pente. Il ne présente jamais non plus une coupe transversale de niveau : l'une des banquettes latérales est souvent en déblai et l'autre en remblai, et le volume de celle-ci augmente considérablement avec son éloignement de l'axe. Et puis l'une des deux levées se fait en partie avec la terre provenant d'un contre-fossé. Ces raisons et bien d'autres concourent pour modérer la largeur du canal. Le rapport de cette largeur à la hauteur d'eau le plus propre à diminuer la dépense, variera, comme l'on voit, avec une foule de circonstances locales, et il est impossible de donner une formule ou une méthode qui en fournisse généralement la valeur.

Pour fixer son choix dans chaque cas, il sera donc nécessaire de calculer préalablement un nombre suffisant de systèmes de valeurs de la largeur au plafond l, et de la hauteur d'eau h qui, avec la pente longitudinale donnée I, procurent le débit Q, afin de les comparer sous divers rapports, et d'examiner avec soin, bien que d'une manière simplement approximative, et plutôt graphique et visuelle qu'analytique, la dépense qui résulterait de l'adoption de chacun.

26. *Longueur du calcul si l'on emploie soit la formule binôme, soit les tables de* U *en* RI.

Or, si l'on recherche ces systèmes de valeurs conjuguées de h et de l en faisant usage de la formule à second membre binôme, il faudra, avec

Prony, y mettre pour ω, χ, U les valeurs (37), ce qui lui donne la forme

$$(38)\quad h^2(l+ht)^3-a\frac{Q}{I}h(l+ht)(l+2ht')-b\frac{Q^2}{I}(l+2ht')=0.$$

Elle est du sixième degré en h et du troisième en l.

Résoudre par approximations successives une seule équation numérique d'un de ces deux degrés n'est point pénible; mais en résoudre une suite de semblables pour des hypothèses suffisamment nombreuses sur la grandeur qu'il est possible d'attribuer à l'une des deux inconnues entraînerait dans des calculs sans fin.

Et si, abandonnant l'équation, on recourait aux tables connues de RI et U, il faudrait, en attribuant successivement et arbitrairement un certain nombre de valeurs à l, essayer *pour chacune d'elles*, diverses valeurs de h, jusqu'à ce qu'on en trouvât une donnant pour $\frac{\omega}{\chi}I$ et $\frac{Q}{\omega}$ des nombres qui se correspondent dans ces tables : opération rebutante que l'on ne pourrait abréger qu'en la bornant à un petit nombre de valeurs de l, soit deux ou trois comme l'on fait ordinairement, ce qui ne renseigne que d'une manière incomplète, et conduit à adopter finalement des dimensions autres que celles donnant ce maximum d'économie.

Le problème est important cependant. C'est celui qui se présente le plus fréquemment dans l'établissement des canaux d'irrigation et de desséchement, des rigoles, etc. Il mériterait des tables numériques spéciales; mais comment dres-

ser des tables de relation entre *cinq* quantités Q, I, t, l, h?

27. *Sa brièveté avec la formule monôme. Tables donnant encore plus expéditivement autant de systèmes que l'on veut de la largeur et de la profondeur d'eau.*

Notre formule $\frac{\omega}{\chi}I = cU^m$ va nous faire sortir de cette difficulté.

En effet, en y mettant pour ω, χ, U leurs valeurs (37), elle devient :

$$h\frac{\frac{l}{h}+t}{\frac{l}{h}+2t'}I = c\frac{Q^m}{h^{2m}\left(\frac{l}{h}+t\right)^m}.$$

D'où, t' étant $=\sqrt{1+t^2}$, $c=0{,}00040102$, $m=\frac{21}{11}$:

$$(39)\qquad h=\left[\frac{\frac{l}{h}+2\sqrt{1+t^2}}{\left(\frac{l}{h}+t\right)^{m+1}}\right]^{\frac{1}{2m+1}}\left(\frac{c}{I}\right)^{\frac{1}{2m+1}}Q^{\frac{m}{2m+1}}=$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{l}{h}+2\sqrt{1+t^2}\right)^{11}}{\left(\frac{l}{h}+t\right)^{32}}\right]^{\frac{1}{53}}\cdot\left(\frac{0{,}000401}{I}\right)^{\frac{11}{53}}\cdot Q^{\frac{21}{53}}.$$

Cette expression peut être calculée directement et sans tâtonnement, par logarithmes, pour diverses grandeurs du rapport $\frac{l}{h}$, ce qui donnera

assez promptement autant de systèmes de valeurs de l et h que l'on voudra, satisfaisant à la condition du débit donné Q sous la pente donnée I.

Mais comme elle se compose de trois facteurs, on peut en avoir bien plus expéditivement la valeur en puisant ceux-ci dans les trois petites tables suivantes, où la pente I varie depuis 0,000020 jusqu'à 0,002 (deux centimètres jusqu'à deux mètres par kilomètre), le débit Q depuis 20 litres jusqu'à 20 mètres cubes par seconde (*), les talus depuis zéro jusqu'a 2 de base sur 1 de hauteur, et les rapports $\frac{l}{h}$ de la largeur au plafond à la profondeur d'eau depuis zéro jusqu'à dix.

(*) Voir les colonnes d'observation des deuxième et troisième tables.

Valeurs du premier facteur de l'expression de la hauteur d'eau

$$h=\left[\frac{\left(\frac{l}{h}+2\sqrt{1+t^2}\right)^{11}}{\left(\frac{l}{h}+t\right)^{32}}\right]^{\frac{1}{53}}\cdot\left(\frac{0,00040102}{I}\right)^{\frac{11}{53}}\cdot Q^{\frac{21}{53}}$$

dans un canal trapèze dont la largeur au plafond est l *et les talus* t *sur un, débitant* Q *mèt. cub. par seconde sous une pente* I *par mètre.*

Rapport de la largeur au plafond à la hauteur d'eau $\frac{l}{h}$	Canaux rect. $t=0$; $2\sqrt{1+t^2}=2$		$t=0,50$; $2\sqrt{1+t^2}=2,236070$		$t=1$ sur 1; $2\sqrt{1+t^2}=2,82843$		$t=1,25$; $2\sqrt{1+t^2}=3,20156$	
	Valeurs du 1er facteur.	Différences.	Valeurs du 1er facteur.	Différences.	Valeurs du 1er facteur.	Différences.	Valeurs du 1er facteur.	Différences.
			m.		m.		m.	
0,00	∞		1,7548	3176	1,2408	1371	1,1127	1003
0,25	2,7328	8948	1,4372	2049	1,1037	989	1,0124	765
0,50	1,8380	3704	1,2323	1356	1,0048	754	0,9359	607
0,75	1,4676	2115	1,0967	978	0,9294	599	0,8752	497
1,00	1,2561	2408	0,9989	1338	0,8695	901	0,8255	769
1,50	1,0153	1379	0,8651	892	0,7794	658	0,7486	574
2,00	0,8774	917	0,7759	645	0,7136	494	0,6912	451
2,50	0,7857	663	0,7114	496	0,6642	399	0,6461	365
3,00	0,7194	508	0,6618	396	0,6243	329	0,6096	303
3,50	0,6686	406	0,6222	326	0,5914	276	0,5793	258
4,00	0,6280	383	0,5896	274	0,5638	236	0,5535	222
4,50	0,5947	280	0,5622	235	0,5402	206	0,5313	194
5,00	0,5667	448	0,5387	384	0,5196	342	0,5119	326
6,0	0,5219	346	0,5003	304	0,4854	275	0,4793	264
7,0	0,4873	278	0,4699	248	0,4579	228	0,4529	219
8,0	0,4595	230	0,4451	207	0,4351	193	0,4310	187
9,0	0,4365	194	0,4244	178	0,4158	166	0,4123	161
10,0	0,4171		0,4066		0,3992		0,3962	

	$t=1,50$; $2\sqrt{1+t^2}=3,60555$		$t=1,75$; $2\sqrt{1+t^2}=4,03113$		$t=2$ sur 1; $2\sqrt{1+t^2}=4,47214$	
0,00	1,0216	778	0,9526	627	0,8976	518
0,25	0,9438	616	0,8899	513	0,8458	436
0,50	0,8822	505	0,8386	429	0,8022	374
0,75	0,8317	421	0,7957	365	0,7648	318
1,00	0,7896	670	0,7592	591	0,7330	526
1,50	0,7226	514	0,7001	464	0,6804	424
2,00	0,6712	409	0,6537	375	0,6380	345
2,50	0,6303	336	0,6162	311	0,6035	290
3,00	0,5967	281	0,5851	264	0,5745	248
3,50	0,5686	243	0,5587	228	0,5497	215
4,00	0,5443	210	0,5359	198	0,5282	189
4,50	0,5233	184	0,5161	176	0,5093	168
5,00	0,5049	311	0,4985	298	0,4925	286
6,0	0,4738	254	0,4687	244	0,4639	236
7,0	0,4484	212	0,4443	206	0,4403	199
8,0	0,4272	181	0,4237	176	0,4204	171
9,0	0,4091	157	0,4061	152	0,4033	149
10,0	0,3934		0,3909		0,3884	

Valeurs du second facteur $\left(\frac{0,00040102}{I}\right)^{\frac{11}{53}}$

Pente I.	2e facteur.	Différences.	Pente I.	2e facteur.	Différences.
0,000 020	1,863	19	0,000 200	1,1553	116
21	1,844	17	210	1,1437	110
22	1,827	17	220	1,1327	104
23	1,810	16	230	1,1223	99
24	1,794	15	240	1,1124	94
25	1,779	14	250	1,1030	89
26	1,765	14	260	1,0941	85
27	1,751	13	270	1,0856	82
28	1,738	13	280	1,0774	78
29	1,725	12	290	1,0696	75
0,000 030	1,713	12	0,000 300	1,0621	72
31	1,701	11	310	1,0549	69
32	1,690	11	320	1,0480	67
33	1,679	10	330	1,0413	64
34	1,669	10	340	1,0349	63
35	1,659	10	350	1,0286	60
36	1,649	9	360	1,0226	57
37	1,640	9	370	1,0169	56
38	1,631	9	380	1,0113	55
39	1,622	9	390	1,0058	53
0,000 040	1,613	8	0,000 400	1,0005	51
41	1,605	8	410	0,9954	50
42	1,597	8	420	0,9904	48
43	1,589	7	430	0,9856	47
44	1,582	7	440	0,9809	45
45	1,575	8	450	0,9764	45
46	1,567	7	460	0,9719	43
47	1,560	6	470	0,9676	42
48	1,554	7	480	0,9634	41
49	1,547	7	490	0,9593	41
0,000 050	1,540	30	0,000 500	0,9552	187
55	1,510	27	550	0,9365	167
60	1,483	24	600	0,9198	152
65	1,459	22	650	0,9046	138
70	1,437	21	700	0,8908	126
75	1,416	19	750	0,8782	117
80	1,397	17	800	0,8665	109
85	1,380	16	850	0,8556	101
90	1,364	16	900	0,8455	94
95	1,348	14	950	0,8361	88
0,000 100	1,334	27	0,001 000	0,8273	164
110	1,307	23	1 100	0,8109	144
120	1,284	21	1 200	0,7965	131
130	1,263	19	1 300	0,7834	120
140	1,244	18	1 400	0,7714	109
150	1,226	16	1 500	0,7605	101
160	1,210	15	1 600	0,7504	94
170	1,195	14	1 700	0,7410	88
180	1,181	13	1 800	0,7322	81
190	1,168	13	1 900	0,7241	77
0,000 200	1,155		0,002 000	0,7164	

Observation. — Pour une valeur de I dix fois plus grande ou dix fois plus petite qu'une de celles ci-contre on multiplierait la valeur correspondante du facteur par $(10)^{\frac{11}{53}} = 1,61268$ ou par $(0,1)^{\frac{11}{53}} = 0,62009$.

Valeurs du troisième facteur $Q^{\frac{21}{53}}$

Débit Q	$Q^{\frac{21}{53}}$	Différences.	Débit Q	$Q^{\frac{21}{53}}$	Différences.	Débit Q	$Q^{\frac{21}{53}}$	Différences.	Observation.
m. cub.			m. cub.			m. cub.			
0,020	0,2122		0,200	0,5285		2,00	1,316		Pour Q dix fois plus petit ou plus grand, multiplier par 0,40158 ou par 2,49016.
21	0,2164	42	0,210	0,5388	103	2,10	1,342	26	
22	0,2204	40	0,220	0,5488	100	2,20	1,367	25	
23	0,2243	39	0,230	0,5586	98	2,30	1,391	24	
24	0,2281	38	0,240	0,5681	95	2,40	1,415	24	
25	0,2319	38	0,250	0,5774	93	2,50	1,438	23	
26	0,2355	36	0,260	0,5864	90	2,60	1,460	22	
27	0,2390	35	0,270	0,5952	88	2,70	1,482	22	
28	0,2425	35	0,280	0,6038	86	2,80	1,504	22	
29	0,2459	34	0,290	0,6123	85	2,90	1,525	21	
0,030	0,2492	33	0,300	0,6206	83	3,00	1,545	20	
31	0,2525	33	0,310	0,6287	81	3,10	1,565	20	
32	0,2557	32	0,320	0,6367	80	3,20	1,585	20	
33	0,2588	31	0,330	0,6445	78	3,30	1,605	20	
34	0,2619	31	0,340	0,6522	77	8,40	1,624	19	
35	0,2649	30	0,350	0,6597	75	3,50	1,643	19	
36	0,2679	30	0,360	0,6671	74	3,60	1,661	18	
37	0,2708	29	0,370	0,6744	73	3,70	1,679	18	
38	0,2737	29	0,380	0,6816	72	3,80	1,697	18	
39	0,2765	28	0,390	0,6886	70	3,90	1,715	18	
0,040	0,2793	28	0,400	0,6955	69	4,00	1,732	17	
41	0,2821	28	0,410	0,7024	69	4,10	1,749	17	
42	0,2848	27	0,420	0,7091	67	4,20	1,766	17	
43	0,2874	26	0,430	0,7157	66	4,30	1,782	16	
44	0,2901	27	0,440	0,7223	66	4,40	1,799	17	
45	0,2927	26	0,450	0,7288	65	4,50	1,815	16	
46	0,2952	25	0,460	0,7351	63	4,60	1,831	16	
47	0,2978	26	0,470	0,7414	63	4,70	1,846	15	
48	0,3002	24	0,480	0,7476	62	4,80	1,862	16	
49	0,3027	25	0,490	0,7538	62	4,90	1,877	15	
0,050	0,3051	24	0,500	0,7598	60	5,00	1,892	15	
55	0,3169	118	0,550	0,7891	293	5,50	1,965	73	
60	0,3280	111	0,600	0,8168	277	6,00	2,034	69	
65	0,3386	106	0,650	0,8431	263	6,50	2,099	65	
70	0,3487	101	0,700	0,8682	251	7,00	2,162	63	
75	0,3583	96	0,750	0,8923	241	7,50	2,222	60	
80	0,3676	93	0,800	0,9154	231	8,00	2,279	57	
85	0,3765	89	0,850	0,9376	222	8,50	2,335	56	
90	0,3852	87	0,900	0,9591	215	9,00	2,388	53	
95	0,3935	83	0,950	0,9799	208	9,50	2,440	52	
0,100	0,4016	81	1,000	1,0000	201	10,0	2,490	50	
0,110	0,4170	154	1,100	1,0385	385	11,0	2,586	96	
0,120	0,4317	147	1,200	1,0749	364	12,0	2,677	91	
0,130	0,4456	139	1,300	1,1097	348	13,0	2,763	86	
0,140	0,4588	132	1,400	1,1426	329	14,0	2.845	82	
0,150	0,4716	128	1,500	1,1743	317	15,0	2,924	79	
0,160	0,4838	122	1,600	1,2047	304	16,0	3,000	76	
0,170	0,4955	117	1,700	1,2340	293	17,0	3,073	73	
0,180	0,3069	114	1,800	1,2623	283	18,0	3,143	70	
0,190	0,5179	110	1,900	1,2896	273	19,0	3,211	68	
0,200	0,5285	106	2,000	1,3161	265	20,0	3,277	66	

28. *Formule graphique dont on peut se servir avantageusement au lieu de la première table.*

Mais on peut rendre l'opération encore plus brève en la faisant graphiquement. On a tracé à la *fig.* 6, au moyen de la première table, sept courbes dont chacune est relative à l'une des grandeurs du talus t, et qui ont, à l'échelle du dixième, pour ordonnées les hauteurs d'eau h et pour abscisses les demi-largeurs $\frac{h}{2}\left(\frac{l}{h}+2t\right)$ de la surface de l'eau dans tous les canaux rectangles ou trapèzes pour lesquels on a

$$\left(\frac{0,00040102}{I}\right)^{\frac{11}{53}} Q^{\frac{21}{53}}=1, \quad \text{ou} \quad I=0,00040102\, Q^{\frac{21}{11}},$$

tels que sont, par exemple, les canaux débitant 1 mètre cube d'eau par seconde sous une pente de $0^m,00040102$ par mètre, ou 1/2 mètre cube, 2 mètres cubes sous des pentes de 0,0001068, de 0,001506, etc.

Ces courbes donnent immédiatement les profils transversaux d'autant de canaux que l'on veut, capables d'un débit donné quelconque sous une pente donnée aussi quelconque. Ainsi, par un point M pris arbitrairement sur l'une de ces courbes, celle, par exemple, relative au talus de 1 1/2 sur 1, si nous menons une perpendiculaire MK à l'axe des ordonnées OK, et, jusqu'à la rencontre de celui des abscisses OA, une droite MA parallèle à celle des droites tracées sur la figure qui est à l'inclinaison de 1 1/2 sur 1, le trapèze KCAM représentera, à l'échelle de 1 sur 10,

la moitié de la section d'eau d'un canal ayant les débits qu'on vient de dire, sous les pentes correspondantes.

D'où il suit que cette même figure représentera la moitié du profil d'eau d'un canal débitant une quantité d'eau donnée quelconque Q sous une pente I aussi quelconque et donnée, en multipliant ses dimensions par

$$\left(\frac{0{,}00040102}{I}\right)^{\frac{11}{53}} Q^{\frac{21}{53}}.$$

ou *en la considérant comme tracée à l'échelle de* 1 *pour* 10 *fois ce produit*, dont les deux facteurs sont fournis par les deux dernières tables de l'article précédent.

En prenant d'autres points que M sur la même courbe, et menant de même par ces points des droites à 1 1/2 sur 1 et des droites perpendiculaires à l'axe des ordonnées *h*, on aura, au moyen d'une facile réduction d'échelle, autant de profils d'eau que l'on peut en désirer, débitant Q d'eau par seconde avec la pente I, et destinés à être comparés entre eux sur les profils en travers du sol, pour choisir avec connaissance de cause celui qui remplira le mieux la condition si essentielle de la plus grande économie.

Si le canal doit avoir des talus d'une inclinaison intermédiaire entre celles indiquées, on intercalera facilement une nouvelle courbe tracée au crayon, en divisant proportionnellement les arcs transversaux qui joignent les points répondant aux diverses grandeurs du rapport $\frac{l}{h}$ (*).

(*) On voit, à la même figure, une autre courbe trans-

29. *Application.*

Comme exemple de l'usage de ces tables ou de ce tracé, supposons qu'il s'agisse de transporter 2^{mc},28 d'eau par seconde, par un canal en pente de 0^{m},000257 par mètre. La deuxième table donne, pour $I=0{,}000257$, en se servant de la colonne des différences :

$$\left(\frac{0{,}000401}{I}\right)^{\frac{11}{53}}=1{,}1030-\frac{7}{10}.0{,}0089=\ldots\ldots\ 1{,}0968$$

La troisième donne, pour $Q=2{,}28$:

$$Q^{\frac{21}{53}}=1{,}367+\frac{8}{10}\,0{,}024=\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1{,}386$$

Leur produit : $\left(\dfrac{cQ^{\frac{21}{11}}}{I}\right)^{\frac{11}{53}}$ ou $\left(\dfrac{cQ^{m}}{I}\right)^{\frac{1}{2m+1}}=\ 1{,}5201$

est le nombre constant par lequel il suffit de multiplier la première table de l'article 27 pour avoir de suite autant de systèmes que l'on veut de valeurs de la hauteur d'eau h et de la largeur au plafond l, satisfaisant à la question. Supposons, par exemple, que le talus doive être de 1 1/2 sur 1 ; la colonne relative à ce talus, multipliée par 1,5201, donnera :

---

versale tournant en haut sa convexité. Elle joint entre eux les points des courbes principales qui, pris pour le point arbitraire M, donnent, pour chaque talus, la section de moindre surface (note de l'article 24). La position de ces points explique comment, entre $\frac{l}{h}=0{,}50$ et $\frac{l}{h}=10$, la surface ω ne varie pas, pour chaque grandeur du talus t, de plus de 1/8.

Pour $\frac{l}{h}$ = 0,50 ;		h = 1m,339,	d'où l =	0m,6695
= 1	. . . .	1m,200	. . . . . .	1m,200
= 2	. . . .	1m,020	. . . . . .	2m,040
= 3	. . . .	0m,907	. . . . . .	2m,721
= 4	. . . .	0m,827	. . . . . .	3m,308
= 5	. . . .	0m,767	. . . . . .	3m,835
= 7	. . . .	0m,682	. . . . . .	4m,771
= 10	. . . .	0m,598	. . . . . .	5m,980

et une infinité d'autres systèmes, car on peut aussi multiplier par 1,5201 des nombres intercalés.

On ne donne pas le dessin des profils qui en résultent, parce qu'ils ne seraient qu'une reproduction de ceux tels que KOAM, que l'on peut tirer de la *figure* 6, dont l'usage eût donné les mêmes valeurs de h jusqu'aux centimètres.

Il n'est pas difficile de voir, en y rapportant deux levées latérales de 1m,50 de largeur en couronne et 0m,40 d'élévation au-dessus de l'eau, que ces huit profils exigent à très-peu de chose près le même déblai supposé capable de fournir tout juste au remblai des digues sur un terrain sans pente transversale. Cela vient de ce que l'économie, bien que réelle, qu'offrent à cet égard les larges sections (art. 24, 2e note) est très-faible jusqu'à $\frac{l}{H} = 12$ (*).

Mais, nous le répétons, ce n'est pas le cube du déblai à faire dans le cas abstrait d'un terrain sans

(*) Si l'on représente par a la largeur des digues en couronne, par H leur hauteur au-dessus du plafond, par t le talus de la cuvette, t_1 le talus extérieur des digues, la hauteur z du déblai ayant un cube égal à celui du remblai,

pente transversale et possédant exactement la pente longitudinale I, qui devra déterminer le choix de la section parmi celles dont on vient de donner les dimensions. Il faudra (art. 25) avoir égard aux autres considérations. Ce qu'il y aura de plus simple à faire pour cela sera de tailler de petits gabarits en papier sur les divers profils ainsi obtenus pour la section d'eau, en y rapportant les levées, afin de les appliquer successivement sur les profils en travers réels du terrain. On pourra évaluer ainsi, au moins par un aperçu rapide, la dépense dans plusieurs hypothèses en prenant en considération la déclivité transversale variable et les inégalités du profil longitudinal, la dépense des transports de terre en travers et en long, les contre-fossés à ouvrir, le prix des terrains à occuper sur une largeur plus ou moins grande, etc.,

---

moins une quantité C supposée fournie par le contre-fossé, est donnée par l'équation :

$$z(l+tz)+C=2(H-z)\left[a+\frac{t+t_1}{2}(H-z)\right],$$

d'où, en faisant

$$\frac{2H(t+t_1)+2a+l}{2t_1}=A,\quad \frac{H^2(t+t_1)+2aH-C}{t_1}=B$$

l'on tire $z=A-\sqrt{A^2-B}$, et par conséquent le déblai de la cuvette :

$$z(l+tz)=-Bt+(l+2At)(A-\sqrt{A^2-B}).$$

Dans le cas présent où $C=0$, $t=t_1=1,5$, $H=h+0,40$, $a=1,50$, on trouve successivement pour les cubes de déblai répondant à $\frac{l}{h}=0,50$; 3; 10;

$$z(l+tz)=2^{mc},772;\quad 2,766;\quad 2,70.$$

Ce qui approche de l'égalité, comme nous venons de le dire.

et l'on s'arrêtera à celle des sections essayées pour laquelle la dépense paraîtra la plus faible, les autres convenances étant remplies.

Observons que ce tâtonnement graphique, dont il est impossible de formuler le résultat d'une manière générale, est indispensable, quelle que soit la méthode de calcul dont on se serve. Les petites tables ou la formule graphique, basées sur notre formule monôme, abrégeront singulièrement ce qui doit le précéder, et permettront de faire porter les essais sur un grand nombre de profils d'eau.

Sans ce secours, la longueur rebutante du calcul des systèmes de valeurs conjuguées de *h* et de *l* serait cause qu'on se bornerait à en essayer un ou deux, et l'économie serait sacrifiée comme elle l'est trop souvent. Il nous a paru essentiel d'insister sur une méthode de calcul qui, sans donner de solution générale, puisqu'il n'en saurait exister, permet de peser toutes les considérations sans en omettre aucune, et de dresser de bons projets d'ouvrages qui intéressent à un haut degré l'avenir de notre agriculture et de notre industrie.

§ 3. Diamètres des tuyaux de conduite.

30. *Solution des problèmes sur les conduites d'eau.*

Bien que la forme monôme cU^m, donnée à l'expression de la hauteur fluide représentative du frottement des parois, se justifie surabondamment en ce qui regarde les tuyaux, par une conformité aux expériences que l'on ne saurait obtenir

(art. 20) de la forme binôme $aU + bU^2$, il est bon de faire voir qu'elle se prête à la facilité des solutions, mieux que celles-ci, et tout aussi bien que celle bU^2 à laquelle divers auteurs la réduisent en sacrifiant volontairement l'exactitude à la simplicité.

Lorsque le problème est de déterminer la charge JL consommée par le frottement des parois d'une conduite de longueur L dont on connaît le diamètre D et le débit Q par seconde, il peut être résolu de suite, quelle que soit la formule, en se servant seulement de tables de $\frac{DJ}{4}$ et U comme celles de l'art. 21 : car on a immédiatement la vitesse $U = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2}$; et, en cherchant dans la table la valeur $\frac{DJ}{4}$ correspondante, ou en déduit J et par suite JL.

Mais, de même que pour les canaux (art. 24 à 29), le problème est plus implicite lorsque *c'est le diamètre de la conduite que l'on cherche* au moyen de sa pente J et de son débit Q. Aussi, pour le déterminer sans résoudre l'équation du cinquième degré résultant de la substitution de $\frac{4Q}{\pi D^2}$ à la place de U dans l'équation de Prony $\frac{DJ}{4} = aU + bU^2$, M. Fourneyron, multipliant cette équation élevée au carré par celle $Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$, a déduit de celle $J^2Q = 4\pi U(aU + bU^2)^2$ qui en provient, une table donnant, pour les diverses valeurs du produit J^2Q, les valeurs correspondantes

de la vitesse U (*). L'usage de cette table, lorsque J et Q sont donnés, permet d'avoir U, et, par suite, le diamètre, calculé au moyen de sa valeur $D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U}}$.

Notre formule $\frac{DJ}{4} = cU^m = 0{,}00029557\, U^{\frac{12}{7}}$ fournit directement une expression de l'inconnue D en fonction des quantités connues Q et J; car en y mettant $\frac{4Q}{\pi D^2}$ pour U, on en tire :

$$(40) \qquad D = \left[4\left(\frac{4}{\pi}\right)^m c\right]^{\frac{1}{2m+1}} \left(\frac{Q^m}{J}\right)^{\frac{1}{2m+1}} =$$

$$= 0{,}2396687 \left(\frac{Q^{12}}{J^7}\right)^{\frac{1}{31}}$$

calculable par logarithmes, et dont on obtiendra plus promptement la valeur par la simple multiplication de deux nombres tirés de deux petites tables à construire comme celles deuxième et troisième de l'art. 27, et donnant, l'une, les valeurs de $\frac{0{,}2396687}{J^{7/31}}$, l'autre celles de $Q^{\frac{12}{31}}$.

Nous donnerons plus tard ces tables (**) et d'autres fournissant les deux facteurs de

$$(41) \qquad J = Q^m \cdot 4\left(\frac{4}{\pi}\right)^m c D^{-2m-1},$$

(*) Comptes rendus de l'Académie des sciences, novembre 1843, t. XVII, p. 867.

(**) Voir à la fin du mémoire.

et même leurs produits tout faits, afin de remplacer les tables de J, Q, D, U de MM. Mary et Morin, qui ont été dressées avec celle de Prony.

Lorsque, au lieu d'une seule conduite, on doit en établir un réseau pour la distribution de l'eau d'une source entre plusieurs réservoirs d'alimentation des fontaines d'une ville, la détermination des conditions d'établissement se réduit, comme l'on sait, à la solution, de proche en proche, de plusieurs problèmes comme les deux dont venons de parler.

Et si, pour avoir les diamètres satisfaisant à la moindre dépense, sans être obligé de faire d'abord une suite d'hypothèses sur ceux de la conduite principale, on veut traiter analytiquement le problème du minimum du poids total de fonte, comme a fait M. Bresse dans ses répétitions à l'École des ponts et chaussées, il est bien facile de voir que l'on y parviendra aussi bien en partant de $\frac{DJ}{4} = cU^m$ que de l'équation inexacte $\frac{DJ}{4} = bU^2$; car, en mettant, dans la suite des équations posées entre les hauteurs de charge conservées et perdues dans chaque partie de la conduite et des branchements, des valeurs telles que (41) à la place des *pentes* J, on aura des équations qui seront toutes du premier degré entre les puissances $-2m-1$ des diamètres inconnus, ce qui permet l'élimination d'un nombre de ces diamètres égal à celui des équations, tout comme lorsque l'on a -5 au lieu de $-2m-1$.

§ 4. Comparaison des avantages de la réunion ou de la séparation de deux écoulements d'eau.

31. *Problème relatif à un desséchement de marais.*

On suppose qu'un marais à dessécher reçoit par seconde, des terrains qui lui sont supérieurs, une quantité d'eau. . . . . q
que l'on peut faire écouler, en la dérivant, sous une pente. i

Et que les eaux propres à ce marais (eaux de pluie, de source et de filtration) ont, par seconde, un volume. . . . . q'
que l'on ne peut faire écouler que sous une pente plus faible. . . . . i'

On demande s'il y a économie à faire écouler ces eaux *extérieures* et ces eaux *intérieures* par deux canaux séparés ayant les pentes i et i', ou à les réunir dans un même canal d'évacuation, qui ne pourra avoir que la pente la plus petite i'?

Soient, pour cela, ω et ω' les sections qui seraient à donner aux canaux séparés, Ω la section que devrait avoir le canal unique auquel nous supposerons, pour plus de généralité, une pente I différente de i. Si p, p', P sont respectivement les prix auxquels reviendront ces trois canaux, par mètre carré des sections ω, ω', Ω, l'économie qu'offrira la séparation des deux canaux sur leur réunion sera représentée par le rapport $\frac{P\Omega}{p\omega+p'\omega'}$.

Si les sections ω, ω', Ω sont semblables, leurs périmètres mouillés χ, χ', X sont proportionnels

aux racines carrées de ces sections, et l'on a, k étant un nombre

$$\frac{\chi}{\omega^{1/2}} = \frac{\chi'}{\omega'^{1/2}} = \frac{X}{\Omega^{1/2}} = k.$$

On a de plus, u, u', U étant les vitesses de l'eau dans les trois canaux :

$$\frac{\omega}{\chi} i = cu^m, \quad \frac{\omega'}{\chi'} i' = cu'^m, \quad \frac{\Omega}{X} I = cU^m.$$

$$q = \omega u, \quad q' = \omega' u', \quad q + q' = \Omega U.$$

D'où, en éliminant u et χ :

$$\omega = q^{\frac{2m}{2m+1}} \left(\frac{ck}{i}\right)^{\frac{2}{2m+1}},$$

et deux expressions analogues pour ω' et Ω. Substituant, on a pour l'inverse du rapport cherché :

$$\frac{p\omega + p'\omega'}{P\Omega} = \frac{p}{P}\left[\left(\frac{q}{q+q'}\right)^m \cdot \frac{I}{i}\right]^{\frac{2}{2m+1}} +$$

$$+ \frac{p'}{P}\left[\left(\frac{q'}{q+q'}\right)^m \cdot \frac{I}{i'}\right]^{\frac{2}{2m+1}},$$

expression dans laquelle il faut faire $I = i'$, si, comme cela a lieu en général, le canal unique, évacuant à la fois les eaux extérieures et les eaux intérieures, doit être fait dans le même emplacement où l'on aurait creusé le canal destiné à celles-ci seules. Supposons, de plus, $P = p'$, bien que, dans un marais, le creusement d'un canal plus profond soit sensiblement plus coûteux, et remplaçons m par sa valeur $\frac{21}{11}$, nous avons :

$$\frac{p\omega + p'\omega'}{P\Omega} = \frac{p}{p'}\left(\frac{i'}{i}\right)^{\frac{22}{53}}\left(\frac{q}{q+q'}\right)^{\frac{42}{53}} + \left(\frac{q'}{q+q'}\right)^{\frac{42}{53}}.$$

Comme application de cette formule, supposons $p = p'$, $q = q'$, $i = 2i'$, nous trouverons :

1,01035 ;

D'où l'on voit que lorsque le prix d'exécution est le même, par unité superficielle de la section d'eau, pour un canal d'évacuation des eaux intérieures et pour le canal de détournement des eaux extérieures, et lorsque le volume de ces deux espèces d'eaux est le même, il faut que la pente disponible pour le canal de détournement soit plus que double de la pente dont on peut disposer pour le canal d'évacuation pour qu'il y ait avantage à séparer ces deux canaux.

Si, comme il arrive plus souvent, le prix p relatif au canal de détournement est moindre que le prix p' relatif au canal d'évacuation, et la quantité d'eau q à détourner est plus forte que celle q' à évacuer, l'avantage de séparer les deux canaux se fera sentir bien avant que le premier ait une pente double du second. Aussi la plupart des ingénieurs, à l'imitation de ce que Van-Ens a fait à Arles, opèrent cette séparation.

La formule binôme $au + bu^2$ n'aurait pu donner une expression de l'avantage $\frac{P\Omega}{p\omega + p'\omega'}$, de la séparation, comme a fait notre formule monôme cu^m.

32. *Problème analogue relatif aux tuyaux.*

Une expression de la même forme que celle de l'article précédent serait facilement obtenue

pour la comparaison de l'avantage de séparer ou de réunir deux tuyaux de conduite d'eau pour lesquels on dispose de chutes différentes.

§ 5. Remous, ou gonflement produit dans un cours d'eau jusqu'à une distance quelconque en amont d'un barrage qui relève ses eaux d'une hauteur connue en un point déterminé.

33. *Diverses solutions du problème du remous. Comment la plus expéditive peut être rendue exacte et plus générale.*

Ce problème important pour l'établissement des irrigations, de la navigation et des usines est résoluble numériquement, comme on sait, au moyen de l'équation du mouvement permanent des eaux courantes donnée pour la première fois en 1828 par M. Bélanger (*) en effectuant une suite de calculs de proche en proche dont il a donné le type pour des courants dont le lit est d'une forme constante, et qui ont été étendus par M. Vauthier à des courants d'une figure variable quelconque (**).

M. Dupuit a donné, en 1848 (***) une table qui permet de le résoudre bien plus expéditivement, mais qui suppose :

1° Que l'on peut négliger (art. 1) le terme aU du second membre de la formule Prony :

$$RI = aU + bU^2;$$

(*) Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes.

(**) Annales des ponts et chaussées, 1836.

(***) Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes.

2° Que le lit du courant est assimilable à un canal rectangulaire;

3° Qu'il est assez large par rapport aux profondeurs d'eau pour pouvoir supposer le périmètre mouillé χ *égal à la largeur*, ou ce qui revient au même, le rayon moyen ou quotient $\frac{\omega}{\chi}$ égal à la profondeur;

4° Enfin, que l'on peut négliger le double de la hauteur $\frac{U^2}{2g}$ due à la vitesse du courant, devant sa profondeur, ou, ce qui revient au même, *que l'on peut se dispenser de tenir compte de l'inertie des tranches fluides*, ou de la variation de leur force vive quand elles passent d'une position à l'autre.

Nous allons voir que l'on peut obtenir des tables de remous aussi facilement applicables en se passant de ces diverses hypothèses restrictives, savoir de la première en se servant de notre formule monôme $\frac{\omega}{\chi} I = cU^m$; de la deuxième et de la troisième en intégrant l'équation différentielle du mouvement au moyen de la formule de quadrature de Thomas Simpson, qui donne des résultats aussi approchés que les intégrales par série de M. Dupuit; enfin de la quatrième hypothèse du même ingénieur en ajoutant une colonne qui permet de tenir facilement compte de l'influence de l'inertie ou de la variation de force vive.

On verra même (art. 46) que les tables, ou le tracé graphique qui peut les remplacer approximativement (art. 42) peuvent servir aussi, dans la supposition où la résistance des parois serait

reconnue un peu plus forte, pour même vitesse moyenne, dans le mouvement varié que dans le mouvement uniforme.

En sorte que, sans recourir à ces équations empiriques de la courbe de remous, qui ont été essayées à plusieurs reprises et qui peuvent conduire à d'énormes mécomptes et à des absurdités, le problème pratique du remous pourra, lorsque le cours d'eau ne sera pas très-irrégulier, être résolu en peu d'instants par des tables applicables à tous les cas, aussi exactes que peut le permettre l'état actuel des connaissances expérimentales que l'on possède en hydraulique, et même indépendantes d'une grande partie des erreurs qui ont pu affecter les expériences de Du Buat et des hydrauliciens allemands et italiens (art. 7 et 13) sur lesquelles se base la formule $\frac{\omega}{\chi}I = cU^m$, car, comme on verra, c n'entre point dans les calculs, et l'exposant m n'y influe pas assez pour qu'un écart absolu de 1/30 ou 1/40 sur sa valeur altère les résultats d'une manière bien sensible.

34. *Formule générale du relèvement ou remous.*

Établissons d'abord, en peu de mots, l'équation du mouvement permanent non uniforme des eaux courantes.

Si l'on nomme :

Π le poids du mètre cube d'eau,

u la vitesse moyenne de ce fluide écoulé à travers une tranche dont la section est ω et le périmètre mouillé χ; en sorte que $\Pi\omega u$ est le poids écoulé par cette tranche en une seconde,

ds l'épaisseur de cette tranche infiniment mince, ou la portion de la longueur s du courant qui est occupée par elle,

dz sa pente absolue de superficie,

$\varphi(u)$ la hauteur du prisme fluide dont le poids représente la résistance ou le frottement moyen des parois sur une surface égale à sa base, et par conséquent $\Pi\varphi(u)$ ce frottement par mètre carré de leur surface χds en contact avec la tranche,

α le coefficient, peu différent de l'unité, par lequel il faut multiplier la force vive due à la vitesse moyenne d'une tranche pour avoir la force vive effective de cette tranche, eu égard à l'inégalité des vitesses des différents filets;

Comme l'action de la pesanteur pour enfoncer une molécule d'eau à une profondeur plus grande au-dessous de la surface est toujours compensée, d'après le principe d'Archimède, par la pression des molécules environnantes, le travail moteur de la pesanteur sur la tranche en mouvement n'est dû qu'à la descente dz de la surface, et l'on a pour l'égalité entre la demi-force vive acquise par la masse $\frac{\Pi\omega u}{g}$ écoulée pendant l'unité de temps, en parcourant l'espace u, et le travail tant moteur que résistant qui s'exerce sur elle.

$$d\left(\frac{\Pi\omega u}{g}\cdot\alpha\frac{u^2}{2}\right) = \Pi\omega u \cdot dz - \chi ds \cdot \Pi\varphi(u)\cdot u.$$

Ou, en divisant par le débit $\Pi\omega u$ qui ne varie pas quand on passe d'une tranche à l'autre :

$$(42) \qquad dz = \alpha\frac{udu}{g} + \frac{\chi}{\omega}\varphi(u)ds.$$

Représentons, de plus, par

h la profondeur d'eau, qui est variable d'une section à l'autre,

i la pente du fond, rapportée à l'unité de la longueur s du lit, en sorte que l'on aura, comme l'a remarqué M. Bélanger :

$$dz = ids - dh.$$

H ce que le même auteur a appelé la *hauteur du régime uniforme*, c'est-à-dire la profondeur constante d'un courant uniforme de même débit, ayant le même plafond et les mêmes talus que celui dont nous nous occupons, et où la surface de l'eau a par conséquent la pente i. Ce sera, dans la question qui nous occupe, le cours d'eau dans l'état naturel, ou avant le relèvement par un barrage,

U la vitesse moyenne constante dans ce courant,

Ω sa section,

X son périmètre mouillé.

On aura, puisque la quantité écoulée par seconde dans les deux courants est la même :

$$\omega u = \Omega U, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\Omega U}{\omega}, \quad du = -\frac{\Omega U}{\omega^2} d\omega.$$

Subsituant pour dz, u et du ces valeurs dans (42), on a :

$$ids - dh = -\frac{\alpha}{g}\frac{\Omega U}{\omega}.\frac{\Omega U}{\omega^2}d\omega + \frac{\chi}{\omega}ds\varphi\left(\frac{\Omega U}{\omega}\right),$$

ou

$$(43) \qquad ds = dh.\frac{1 - \alpha\frac{U^2}{g}\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{d\omega}{dh}}{i - \frac{\chi}{\omega}\varphi\left(\frac{\Omega U}{\omega}\right)}.$$

Si nous supposons que la pente du fond soit constante, ainsi que la section du lit sauf la hauteur d'eau, ω et χ sont fonctions de h. On peut donc intégrer cette équation soit exactement, soit par approximation, et l'on aura s en h, ou les distances correspondantes aux relèvements h—H.

On ne saurait, en mettant pour φ l'expression binôme $a\dfrac{\Omega U}{\omega} + b\left(\dfrac{\Omega U}{\omega}\right)^2$, en tirer des tables usuelles, à moins de les composer d'autant de séries de tableaux que l'on peut attribuer de valeurs, soit à la pente de fond i, soit à la vitesse U qui est liée à i par l'équation de régime uniforme; ce qui serait impraticable.

Il en est autrement si l'on met pour φ, dans le dénominateur, notre expression monôme:

$$cu^m = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^m . cU^m.$$

car dans cette dernière expression on peut remplacer cU^m par sa valeur $\dfrac{\Omega}{X}i$. Alors la vitesse U n'entre plus au dénominateur du second membre de l'équation différentielle; et, la pente i affectant les deux termes du dénominateur, on peut l'en chasser, comme a fait M. Dupuit, en multipliant les deux membres par i. L'équation précédente (plus générale que la sienne) devient alors

$$(44) \qquad ids = dh\,\frac{1 - \alpha\dfrac{U^2}{g}\dfrac{\Omega^2}{\omega^3}\dfrac{d\omega}{dh}}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^{m+1}\dfrac{\chi}{X}}.$$

En sorte que l'on peut, lorsque l'on connaît la

forme des fonctions χ et ω en h, intégrer et calculer des tables peu volumineuses donnant non plus s mais is, et s'appliquant par conséquent à toutes les grandeurs de la pente i, comme à toutes les grandeurs de la vitesse U, dont le carré U^2 affectera *seulement comme multiplicateur* les nombres qui proviendront du deuxième terme du numérateur.

35. *Application à un canal rectangle ou trapèze.*

Pour appliquer ce calcul de tables à des lits prismatiques à section rectangle ou trapèze, appelons :

l la largeur au plafond, supposée constante;

t les talus aussi constants; en sorte que

$$\omega = h(l+ht), \quad \chi = l + 2h\sqrt{1+t^2},$$
$$\Omega = H(l+Ht), \quad X = l + 2H\sqrt{1+t^2}.$$

Faisons encore

$$(45)\left\{\begin{aligned} &h - H = y; \quad \frac{H}{l+Ht} = r, \\ &\frac{2H\sqrt{1+t^2}}{l+2H\sqrt{1+t^2}} = \frac{2r\sqrt{1+t^2}}{1-rt+2r\sqrt{1+t^2}} = r'. \end{aligned}\right.$$

C'est-à-dire désignons par

y le gonflement, ou le relèvement de la surface de l'eau, à l'endroit dn courant où l'abscisse horizontale est s;

r le rapport de la profondeur d'eau H à la *largeur moyenne* de l'eau $l + Ht$ dans le courant de régime uniforme;

r' la proportion pour laquelle entrent les parois

latérales ou les talus $H\sqrt{1+t^2}+H\sqrt{1+t^2}$ dans le périmètre mouillé total $l+2H\sqrt{1+t^2}$.

De plus, changeons s en $-s$, ou comptons désormais les longueurs s de l'aval à l'amont, et appelons y_0, s_0 des valeurs correspondantes de y, s, pour un point situé plus en aval que celui (y, s).

L'équation (44) deviendra, en divisant par H et par $l+Ht$ et leurs puissances ses deux membres et les deux termes des fractions qui y entrent, et en intégrant entre le point (s, y) et le point (s_0, y_0) (*):

$$(46)\qquad \frac{i(s-s_0)}{H}=$$

$$=\int_{\frac{y}{H}}^{\frac{y_0}{H}}\frac{d\left(\frac{y}{H}\right)}{1-\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+r'\frac{y}{H}\right)}-$$

$$-\frac{\alpha U^2}{gH}\int_{\frac{y}{H}}^{\frac{y_0}{H}}\frac{\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+rt+2rt\frac{y}{H}\right)d\frac{y}{H}}{1-\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+r'\frac{y}{H}\right)}$$

(*) Si l'on avait fait usage de la formule binôme $au+bu^2$ au lieu de la formule monôme cu^m, le second terme des dénominateurs eût été

$$\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+r'\frac{y}{H}\right)\left[1+\frac{y}{H}\cdot\frac{1+rt\left(1+\frac{y}{H}\right)}{1+\frac{a}{bU}}\right].$$

On reconnaît bien ainsi que, pour avoir $\frac{i(s-s_0)}{H}$ en

36. *Mode du calcul des tables avec cette équation.*

Nous nous en sommes servi pour calculer, en faisant d'abord $s_0 = 0$, $\frac{y_0}{H} = 3$, une suite de grandeurs de $\frac{is}{H}$ pour diverses valeurs successives de $\frac{y}{H}$. Les différences entre ces grandeurs donnent toutes celles de $\frac{i(s - s_0)}{H}$ que l'on peut désirer pour les applications, car le point $s = s_0 = 0$ où nous plaçons ainsi l'origine des distances s comptées de l'aval à l'amont répond, comme l'on voit, à

$$y = 3H,$$

c'est-à-dire à un relèvement triple de la profondeur de régime uniforme, et par conséquent plus grand que ceux que l'on a à considérer ordinairement dans la pratique. On verra d'ailleurs (art. 41) comment on peut calculer ce qui arrive avec un relèvement plus considérable.

Les valeurs successives des deux intégrales qui entrent dans le second membre de (46) ont été obtenues, comme nous avons dit, par la méthode de Thomas Simpson. Pour cela, après avoir choisi des grandeur du talus t et du rapport r de la profondeur à la largeur moyenne de l'eau dans l'état

---

fonction de $\frac{y}{H}$, il eût fallu calculer, comme nous venons de dire, autant de tables de valeurs des deux intégrales que l'on peut supposer de valeurs à la vitesse de régime uniforme U.

uniforme, et en avoir déduit le rapport r' (expression 45), nous avons calculé les valeurs successives des deux fonctions de $\frac{y}{H}$ qui multiplient $d\frac{y}{H}$ sous le signe $\int$ pour des valeurs de $\frac{y}{H}$ (*voir* les tableaux art. 37 et 39) que nous avons fait décroître :

De 0,1 en 0,1 entre $\frac{y}{H} = 3$ et $\frac{y}{H} = 1$;
Puis de 0,05 en 0,05 seulement entre 1 et 0,50 ;
Puis de 0,01 en 0,01 entre 0,50 et 0,05 ;
Puis de 0,002 en 0,002 entre 0,05 et 0,02 ;
Enfin de 0,001 en 0,001 entre $\frac{y}{H} = 0{,}02$ et $= 0{,}01$ (*).

Puis, en appelant Z l'une de ces deux fonctions de $\frac{y}{H}$ engagées sous le signe $\int$, et en représentant par Z_1, Z_2, Z_3, trois de ses valeurs équidistantes ou répondant à trois valeurs $\frac{y_1}{H}, \frac{y_2}{H}, \frac{y_3}{H}$ consécutives et équidifférentes de $\frac{y}{H}$, nous avons pris la portion d'intégrale :

$$\int_{\frac{y_1}{H}}^{\frac{y_3}{H}} Zd\left(\frac{y}{H}\right) = \left(\frac{y_3}{H} - \frac{y_1}{H}\right) \frac{Z_1 + 4Z_2 + Z_3}{6}.$$

Ce qui a permis, par l'addition d'une suite d'ex-

(*) M. Bélanger a conseillé dès 1828, art. 46 de son Mémoire, cette décroissance successive des intervalles choisis entre les hauteurs successives des gonflements, vu que chacun d'eux répond à des distances de plus en plus grandes à mesure qu'on avance vers amont.

pressions semblables, d'obtenir les grandeurs de l'intégrale totale jusqu'à toutes les valeurs de $\frac{y}{H}$ prises de deux en deux. Ensuite nous avons fait les intercalations, ou obtenu les grandeurs de l'intégrale jusqu'aux ordonnées intermédiaires, telles que Z_2, au moyen des deux expressions suivantes, toujours conformes à la méthode Simpson qui consiste à substituer, à l'arc de la courbe ayant les $\frac{y}{H}$ pour abscisses et les Z pour ordonnées, et compris entre les ordonnées Z_1 et Z_3, un arc d'une parabole dont l'axe est parallèle à celui des Z :

$$\int_{\frac{y_1}{H}}^{\frac{y_2}{H}} Zd\left(\frac{y}{H}\right) = \left(\frac{y_2}{H} - \frac{y_1}{H}\right)\left(\frac{Z_1 + 4Z_2 + Z_3}{6} - \frac{Z_3 - Z_1}{4}\right),$$

$$\int_{\frac{y_2}{H}}^{\frac{y_3}{H}} Zd\left(\frac{y}{H}\right) = \left(\frac{y_3}{H} - \frac{y_2}{H}\right)\left(\frac{Z_1 + 4Z_2 + Z_3}{6} + \frac{Z_3 - Z_1}{4}\right).$$

Nous nous sommes assuré de deux manières qu'avec les intervalles choisis entre les valeurs successives de la variable $\frac{y}{H}$, la méthode Simpson donnait des résultats suffisamment exacts :

1° Nous avons pris les intervalles des $\frac{y}{H}$ de 0,01 en 0,01 au lieu de les prendre de 0,05 en 0,05 entre $\frac{y}{H} = 1$ et $\frac{y}{H} = 0,50$, et nous avons, pour le cas $t = 0$, $r = 0$, trouvé les mêmes valeurs pour l'intégrale jusqu'à la cinquième décimale inclusivement. Quelques vérifications analogues ont

été faites pour d'autres valeurs de $\frac{y}{H}$ et de t et r.

2° Nous avons, toujours pour le cas $t=o$, $r=o$ qui est celui d'un canal dont la largeur est extrêmement grande par rapport à la profondeur, calculé les deux intégrales en les réduisant en séries, et nous avons trouvé des valeurs identiques à celles fournies par la méthode Simpson, jusqu'à la quatrième et plus ordinairement jusqu'à la cinquième, la sixième et même la septième décimale inclusivement ; et cela malgré l'accumulation de petites erreurs qui peut résulter de l'addition successive de petites aires partielles par la méthode Simpson (*).

37. *Tables de remous calculées.*

Voici les tables que nous avons ainsi calcu-

(*) Nous croyons devoir donner ici ces deux séries, dont le calcul numérique est plus long que celui qui s'opère par la méthode Simpson, mais qui nous ont servi de vérification. Elles sont analogues à celle de la fin de l'art. 59 et à celle de l'art. 66 du livre de M. Dupuit; celles qui ne sont pas affectées du rapport $\alpha \frac{U^2}{gH}$ n'en diffèrent même que par le coefficient et les exposants. Il est bon de voir ainsi que les calculs analytiques que l'on peut faire sur les eaux courantes, en réduisant le binôme $au+bu^2$ de la formule Prony à son second terme bu^2, sont également possibles et pas plus difficiles en les remplaçant par le monôme cu^m qui représente aussi bien les expériences que le binôme complet.

Lorsque $t=o$, $r=o$, ou $\frac{H}{l}=o$, c'est-à-dire dans le seul cas considéré par M. Dupuit, où la largeur est *infinie*

lées, tant pour un lit rectangulaire que pour

---

par rapport à la profondeur, l'équation (44), avec la notation $h - H = y$, devient

$$\frac{ids}{H} = \frac{1 - \alpha \frac{U^2}{gH}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-3}}{1 - \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-1}} d\frac{y}{H}.$$

Elle se réduit à celle $ids = \frac{(H+y)^3}{(H+y)^3 - H^3} dy$ de M. Dupuit lorsqu'on fait l'exposant $m = 2$ et que l'on néglige, comme il a fait, $\alpha \frac{U^2}{gH} \cdot \frac{H^3}{h^3} = \alpha \frac{u^2}{gh}$ devant 1 (fin de son art. 59, en se reportant à la formule (2) de son art. 56), ou, ce qui revient au même, lorsqu'on efface du second membre de l'équation différentielle du mouvement varié (42) le terme $\alpha \frac{udu}{g}$, ce qui la réduit à celle $\omega dz = \chi ds \varphi(u)$ du mouvement uniforme, appliquée à chaque partie du courant.

Pour avoir des séries convergentes en intégrant l'équation que nous venons de décrire, on développera les fractions du second membre de deux manières différentes selon que les relèvements y sont ou ne sont pas très-petits par rapport à la profondeur primitive H.

1° Pour les relèvements y qui ne sont pas très-petits, on n'a qu'à développer

$$\frac{1}{1 - \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-1}}, \text{ comme } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

ce qui donne :

$$\frac{ids}{H} = \left[1 + \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-1} + \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-2m-2} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-3m-3} + \ldots\ldots\right] d\frac{y}{H} - \frac{\alpha U^2}{gH}\left[\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-3} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-4} + \left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-2m-5} + \ldots\ldots\right] d\frac{y}{H}.$$

des lits trapèzes dont les talus sont à 1 et à 2 de:

Intégrant et représentant, comme nous avons fait, par y_0 ce relèvement au point où $s = s_0$, s étant remplacé par $-s$, on a

$$i(s - s_0) = \left\{\frac{y_0}{H} - \frac{y}{H} + \frac{1}{m}\left[\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m} - \left(1 + \frac{y_0}{H}\right)^{-m}\right] + \ldots\right\} - \frac{\alpha U^2}{gH}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{y_0}{H}\right)^{-2}\right] + \frac{1}{m+3}\left[\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-3} - \left(1 + \frac{y_0}{H}\right)^{-m-3}\right] + \ldots\right\},$$

ou en mettant pour m sa valeur $\frac{21}{11}$:

$$\frac{i(s - s_0)}{H} = \frac{y}{H} + \frac{11}{21}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-\frac{21}{11}} + \frac{11}{53}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-\frac{53}{11}} + \frac{11}{85}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-\frac{85}{11}} + \ldots - \frac{\alpha U^2}{gH}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-2} + \frac{11}{54}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-\frac{54}{11}} + \frac{11}{86}\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-\frac{86}{11}} + \ldots\right] - \left\{\begin{matrix}\textit{Idem}\\ \text{en } \frac{y_0}{H}\end{matrix}\right\}.$$

Les deux séries entre crochets sont assez convergentes lorsque le rapport $\frac{y}{H}$ excède 0,40 pour la première et 0,30 environ pour la seconde.

2° Pour les relèvements y très-petits par rapport à la profondeur primitive H, et par conséquent pour toutes les parties supérieures du remous, il faut développer $\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-3}$ et $\left(1 + \frac{y}{H}\right)^{-m-1}$ suivant les puissances de

base sur 1 de hauteur, c'est-à-dire pour

$$t=0,\quad t=1,\quad t=2$$

$\frac{y}{H}$, ce qui donne d'abord $ids=$

$$\frac{\left[1-\frac{\alpha U^2}{gH}\left(1-3\frac{y}{H}+6\frac{y^2}{H^2}-10\frac{y^3}{H^3}+15\frac{y^4}{H^4}-\ldots\right)\right]\frac{dy}{(m+1)\frac{y}{H}}}{1-\frac{m+2}{2}\frac{y}{H}+\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\frac{y^2}{H^2}-\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdot\frac{m+4}{4}\frac{y^3}{H^3}+\ldots};$$

puis, effectuant la division de 1 par la série du dénominateur, ou faisant $b=-\frac{m+2}{2}$, $c=\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\ldots$ dans cette expression générale :

$$\frac{1}{1+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\ldots\ldots}=1-bx+(b^2-$$
$$-c)x^2-(b^3-2bc+d)x^3+(b^4-3b^2c+2bd+c^2-e)x^4-$$
$$-(b^5-4b^3c+3bc^2+3b^2d-2cd-2be+f)x^5+\text{etc.}$$

et multipliant par le numérateur, on trouve :

$$ids=dy\left[\frac{H}{(m+1)y}+\frac{m+2}{2(m+1)}+\frac{m(m+2)}{12(m+1)}\frac{y}{H}-\frac{m(m+2)}{24(m+1)}\frac{y^2}{H^2}+\ldots\ldots\right]$$
$$-\frac{\alpha U^2}{gH}dy\left[\frac{H}{(m+1)y}-\frac{4-m}{2(m+1)}+\frac{m^2-16m+36}{12(m+1)}\cdot\frac{y}{H}-\frac{7m^2-58m+96}{24(m+1)}\frac{y^2}{H^2}+\ldots\ldots\right]$$

Intégrant toujours depuis un point situé à une distance $s=0$ et pour lequel le relèvement $y=y_0$ est supposé ou connu *à priori* ou déjà calculé par la série relative aux grandes valeurs de y, qu'on vient d'établir, on a

en donnant, pour chacun, les trois valeurs :

$$r=0,\quad r=1/6,\quad r=1/3,$$

$$\frac{-i(s-s_0)}{H}=\frac{1}{m+1}\log.\text{hyp.}\frac{y}{y_0}+\frac{m+2}{2(m+1)}\frac{y_0-y}{H}+$$
$$+\frac{m(m+2)}{24(m+1)}\frac{y_0^2-y^2}{H^2}-\frac{m(m+2)}{72(m+1)}\frac{y_0^3-y^3}{H^3}-$$
$$-\frac{m(m+2)(m^2+2m-18)}{2880(m+1)}\frac{y_0^4-y^4}{H^4}-$$
$$-\frac{m(2-m)(m+2)(m+4)}{2400(m+1)}\frac{y_0^5-y^5}{H^5}+\text{etc.}$$
$$-\frac{\alpha U^2}{gH}\left\{\frac{1}{m+1}\log.\text{hyp.}\frac{y}{y_0}-\frac{4-m}{2(m+1)}\frac{y_0-y}{H}+\right.$$
$$+\frac{m^2-16m+36}{24(m+1)}\cdot\frac{y_0^2-y^2}{H^2}-\frac{7m^2-58m+96}{72(m+1)}\cdot\frac{y_0^3-y^3}{H^3}+$$
$$\left.+\frac{-m^4-4m^3+464m^2-2664m+3600}{720(m+1)}\cdot\frac{y_0^4-y^4}{H^4}-\text{etc.}\right\}$$

Ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{21}{11}$:

$$\frac{i(s-s_0)}{H}=\frac{11}{32}\log.\text{hyp.}\frac{y}{y_0}+\frac{43}{2^6}\cdot\frac{y_0-y}{H}+\frac{7.43}{2^8.11}\frac{y_0^2-y^2}{H^2}-$$
$$-\frac{7.43}{2^8.3.11}\frac{y_0^3-y^3}{H^3}+\frac{5.7.17.43}{2^{11}.11^3}\frac{y_0^4-y^4}{H^4}-$$
$$-\frac{7.13.43}{2^{10}.5.11^3}\frac{y_0^5-y^5}{H^5}+\text{etc.}$$
$$-\frac{\alpha U^2}{gH}\left(\frac{11}{32}\log.\text{hyp.}\frac{y}{y_0}-\frac{23}{2^6}\frac{y_0-y}{H}+\frac{367}{2^8.11}\frac{y_0^2-y^2}{H^2}-\right.$$
$$-\frac{5.29}{2^8.11}\frac{y_0^3-y^3}{H^3}+\frac{5.9.1187}{2^9.11^3}\frac{y_0^4-y^4}{H^4}-$$
$$\left.-\frac{3.16013}{2^{10}.11^3}\frac{y_0^5-y^5}{H^5}+\ldots\right),$$

au rapport $r = \frac{H}{l+Ht}$ de la profondeur d'eau H a la largeur moyenne d'eau $l+Ht$ dans l'état de régime uniforme (*).

La valeur $r=0$ est relative, bien entendu, aux canaux extrêmement larges par rapport à la profondeur de régime uniforme. On a les mêmes nombres, lorsque $r=0$, pour toutes les valeurs des talus t. Aussi la première table convient-elle à $t=1$ ou $=2$ aussi bien qu'à $t=0$.

---

expression dans laquelle les deux séries deviennent assez convergentes pour peu que $\frac{y_0}{H}$ (supposé plus grand que $\frac{y}{H}$) soit au-dessous de 0,40 pour la première série et de 0,30 pour la seconde; mais qu'il ne faudrait pas employer au delà, tandis que la méthode Simpson s'applique à toutes les grandeurs de ce rapport.

(*) On a choisi 1/3 pour la plus grande valeur de r, parce que, moindre, réduite, par exemple, à 1/4 ou 1/5, elle n'aurait pas satisfait à toutes les applications à des canaux rectangulaires, et que, plus considérable, portée par exemple à 2/5, elle eût réduit à rien la largeur au plafond des canaux trapèzes avec talus de 2 sur 1, pour lesquels il convenait que les valeurs de r fussent les mêmes afin de pouvoir faire des interpolations pour des talus non indiqués aux tables.

Tables donnant les remous ou les relèvements d'eau y *à une distance quelconque* $s - s_0$ *en amont d'un barrage qui en produit un* y_0 *dans un courant ayant une pente de fond* i, *une profondeur* H *dans l'état primitif ou de régime uniforme, avec un rapport* r *entre cette profondeur et la largeur moyenne d'eau dans le même état et des bords en talus de* t *sur* 1.

Première table. Cas $r = 0$, t *quelconque (lits très-larges).*

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	Différences.
3,00		0,0000 − 0,0000 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	
2,90	0,10	0,1019 0,0017	0,1019 − 0,0017 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
2,80		0,2039 0,0034	1020 17
2,70		0,3061 0,0054	1022 20
2,60		0,4085 0,0075	1024 21
2,50		0,5110 0,0098	1025 23
2,40		0,6138 0,0123	1028 25
2,30		0,7169 0,0150	1031 27
2,20		0,8202 0,0180	1033 30
2,10		0,9239 0,0214	1037 34
2,00		1,0280 0,0250	1041 36
1,90		1,1325 0,0291	1045 41
1,80		1,2375 0,0336	1050 45
1,70		1,3431 0,0387	1056 51
1,60		1,4493 0,0444	1062 57
1,50		1,5563 0,0509	1070 65
1,40		1,6643 0,0582	1080 73
1,30		1,7734 0,0667	1091 85
1,20		1,8838 0,0764	1104 97
1,10	0,10	1,9959 0,0877	1121 113
1,00		2,1101 0,1009	1142 132
0,95	0,05	2,1681 0,1085	580 76
0,90		2,2268 0,1167	587 82
0,85		2,2864 0,1257	596 90
0,80		2,3470 0,1357	606 100
0,75		2,4086 0,1467	616 110
0,70		2,4714 0,1590	628 123
0,65		2,5358 0,1727	644 137
0,60		2,6019 0,1881	661 154
0,55	0,05	2,6701 0,2056	682 175
0,50		2,7409 0,2255	708 199
0.49	0,01	2,7554 0,2299	145 44
0,48		2,7700 0,2344	146 45
0,47		2,7848 0,2390	148 46
0,46		2,7997 0,2437	149 47
0,45		2,8147 0,2486	150 49
0,44		2,8299 0,2536	152 50
0,43		2,8453 0,2588	154 52
0,42		2,8609 0,2642	156 54
0,41		2,8767 0,2698	158 56
0,40		2,8926 0,2755	159 57
0,39		2,9087 0,2814	161 59
0,38		2,9250 0,2876	163 62
0,37		2,9415 0,2940	165 64
0,36		2,9583 0,3006	168 66
0,35	0,01	2,9754 − 0,3074 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0171 − 0,0068 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Suite de la première table r = 0, t *quelconque* (*lits très-larges*).

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	2,9927	— 0,3145 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0173	— 0,0071 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,33		3,0103	0,3219	176	74
0,32		3,0282	0,3296	179	77
0,31		3,0464	0,3376	182	80
0,30		3,0649	0,3460	185	84
0,29		3,0839	0,3547	190	87
0,28		3,1032	0,3638	193	91
0,27		3,1229	0,3733	197	95
0,26		3,1431	0,3833	202	100
0,25		3,1638	0,3937	207	104
0,24		3,1850	0,4047	212	110
0,23		3,2068	0,4163	218	116
0,22		3,2292	0,4285	224	122
0,21		3,2524	0,4414	232	129
0,20		3,2763	0,4551	239	137
0,19		3,3010	0,4696	247	145
0,18		3,3266	0.4850	256	154
0,17		3,3533	0,5014	267	164
0,16		3,3812	0,5190	279	176
0,15		3,4104	0,5380	292	190
0,14		3,4411	0,5585	307	205
0,13		3,4736	0,5807	325	222
0,12		3,5081	0,6049	345	242
0,11		3,5450	0,6315	369	266
0,10		3,5847	0,6610	397	295
0,09		3,6278	0,6938	431	328
0.08		3,6752	0,7309	474	371
0,07		3,7280	0,7734	528	425
0,06	0,01	3,7877	0,8230	597	496
0,05	0,002	3,8573	0,8823	696	593
0,048		3,8727	0,8956	154	133
0,046		3,8887	0,9095	160	139
0,044		3,9053	0,9241	166	146
0,042		3,9227	0,9394	174	153
0,040		3,9408	0,9555	181	161
0,038		3,9598	0,9724	190	169
0,036		3,9798	0,9903	200	179
0,034		4,0008	1,0093	210	190
0,032		4,0230	1,0294	222	201
0,030		4,0465	1,0509	235	215
0,028		4,0716	1,0739	251	230
0,026		4,0984	1,0987	268	248
0,024		4,1273	1,1255	289	268
0,022		4,1585	1,1547	312	292
0,020	0,002	4,1927	1,1868	342	321
0,019	0,001	4,2110	1,2040	183	172
0,018		4,2303	1,2223	193	183
0,017		4,2506	1,2416	203	193
0,016		4,2721	1,2620	215	204
0,015		4,2949	1,2838	228	218
0,014		4,3193	1,3072	244	234
0,013		4,3455	1,3323	262	251
0,012		4,3737	1,3595	282	272
0,011		4,4043	1,3891	306	296
0,010	0,001	4,4377	— 1,4215 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0334	— 0,0324 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Deuxième table. Cas t = 0 (*lit rectangulaire*), r = 1/6.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	Différences.
3,00		0,0000 — 0,0000 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,1033 — 0,0017 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
2,90	0,10	0,1033 0,0017	1035 18
2,80		0,2068 0,0035	1038 20
2,70		0,3106 0,0055	1040 21
2,60		0,4146 0,0076	1042 23
2,50		0,5188 0,0099	1046 26
2,40		0,6234 0,0125	1050 28
2,30		0,7284 0,0153	1053 30
2,20		0,8337 0,0183	1058 34
2,10		0,9395 0,0217	1063 38
2,00		1,0458 0,0255	1068 41
1,90		1,1526 0,0296	1075 47
1,80		1,2601 0,0343	1082 52
1,70		1,3683 0,0395	1090 59
1,60		1,4773 0,0454	1101 66
1,50		1,5874 0,0520	1112 76
1,40		1,6986 0,0596	1125 86
1,30		1,8111 0,0682	1142 101
1,20		1,9253 0,0783	1161 117
1,10	0,10	2,0414 0,0900	1186 138
1,00		2,1600 0,1038	604 78
0,95	0,05	2,2204 0,1116	612 86
0,90		2,2816 0,1202	622 94
0,85		2,3438 0,1296	632 104
0,80		2,4070 0,1400	645 116
0,75		2,4715 0,1516	660 128
0,70		2,5375 0,1644	676 144
0,65		2,6051 0,1788	696 163
0,60		2,6747 0,1951	720 184
0,55	0,05	2,7467 0,2135	748 211
0,50		2,8215 0,2346	154 46
0,49	0,01	2,8369 0,2392	155 48
0,48		2,8524 0,2440	157 48
0,47		2,8681 0,2488	158 51
0,46		2,8839 0,2539	159 52
0,45		2,8998 0,2591	162 53
0,44		2,9160 0,2644	163 55
0,43		2,9323 0,2699	166 58
0,42		2,9489 0,2757	167 59
0,41		2,9656 0,2816	169 61
0,40		2,9825 0,2877	172 63
0,39		2,9997 0,2940	174 65
0,38		3,0171 0,3005	176 68
0,37		3,0347 0,3073	179 71
0,36		3,0526 0,3144	182 73
0,35		3,0708 — 0,3217 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0185 — 0,0076 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
	0,01		

Suite de la première table. $t=0$, $r=1/6$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	3,0893	— 0,3293 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		
0,33		3,1080	0,3372	0,0187	— 0,0079 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,32		3,1271	0,3454	191	82
0,31		3,1466	0,3539	195	85
0,30		3,1665	0,3629	199	90
0,29		3,1867	0,3722	202	93
0,28		3,2074	0,3819	207	97
0,27		3,2286	0,3921	212	102
0,26		3,2502	0,4028	216	107
0,25		3,2724	0,4141	222	113
0,24		3,2952	0,4259	228	118
0,23		3,3186	0,4383	234	124
0,22		3,3427	0,4514	241	131
0,21		3,3676	0,4653	249	139
0,20		3,3933	0,4800	257	147
0,19		3,4200	0,4956	267	156
0,18		3,4476	0,5122	276	166
0,17		3,4764	0,5300	288	178
0,16		3.5065	0,5491	301	191
0,15		3.5381	0,5695	316	204
0,14		3,5713	0,5917	332	222
0,13		3,6064	0,6157	351	240
0,12		3,6438	0,6419	374	262
0,11		3,6837	0,6707	399	288
0,10		3,7268	0,7027	431	320
0,09		3,7736	0,7383	468	356
0,08		3,8251	0,7786	515	403
0,07		3,8824	0,8248	573	462
0,06	0,01	3,9475	0,8787	651	539
0,050		4,0233	0,9433	758	646
0,048	0,002	4,0401	0,9578	168	145
0,046		4,0575	0,9730	174	152
0,044		4,0756	0,9889	181	159
0,042		4,0945	1,0056	189	167
0,040		4,1143	1,0231	198	175
0,038		4,1350	1,0416	207	185
0,036		4,1568	1,0611	218	195
0,034		4,1797	1,0817	229	206
0,032		4,2039	1,1037	242	220
0,030		4,2296	1,1271	257	234
0,028		4,2569	1,1522	273	251
0,026		4,2862	1,1793	293	271
0,024		4,3177	1,2086	315	293
0,022	0,002	4,3519	1,2404	342	318
0,020		4,3891	1,2754	372	350
0,019	0,001	4,4091	1,2943	200	189
0,018		4,4302	1,3142	211	199
0,017		4,4524	1,3353	222	211
0,016		4,4759	1,3577	235	224
0,015		4,5008	1,3815	249	238
0,014		4,5275	1,4070	267	255
0,013		4,5561	1,4345	286	275
0,012		4,5869	1,4642	308	297
0,011		4,6203	1,4964	334	322
0,010	0,001	4,6569	— 1,5319 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0366	— 0,0355 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Troisième table. Cas $t=0$ (*lit rectangulaire*), $r=1/3$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Diffé-rences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
3,00	0,00	0,0000 —	$0,0000 \frac{\alpha U^2}{gH}$	0,1042 —	$0,0017 \frac{\alpha U^2}{gH}$
2,90		0,1042	0,0017	1044	18
2,30		0,2086	0,0035	1047	20
2,70		0,3133	0,0055	1050	22
2,60		0,4183	0,0077	1053	23
2,50		0,5236	0,0100	1058	26
2,40		0,6294	0,0126	1061	28
2,30		0,7355	0,0154	1065	31
2,20		0,8420	0,0185	1071	35
2,10		0,9491	0,0220	1077	38
2,00		1,0568	0,0258	1082	42
1,90		1,1650	0,0300	1090	47
1,80		1,2740	0,0347	1099	53
1,70		1,3839	0,0400	1108	59
1,60		1,4947	0,0459	1119	68
1,50		1,6066	0,0527	1132	77
1,40		1,7198	0,0604	1147	88
1,30		1,8345	0,0692	1166	103
1,20		1,9511	0,0795	1187	119
1,10	0,10	2,0698	0,0914	1214	142
1,00	0,05	2,1912	0,1056	619	80
0,95		2,2531	0,1136	628	88
0,90		2,3159	0,1224	638	97
0,85		2,3797	0,1321	650	107
0,80		2,4447	0,1428	664	119
0,75		2,5111	0,1547	680	132
0,70		2,5791	0,1679	698	148
0,65		2,6489	0,1827	719	168
0,60		2,7208	0,1995	744	191
0,55	0,05	2,7952	0,2186	775	219
0,50	0,01	2,8727	0,2405	159	47
0,49		2,8886	0,2452	161	49
0,48		2,9047	0,2501	162	51
0,47		2,9209	0,2552	164	52
0,46		2,9373	0,2604	166	54
0,45		2,9539	0,2658	168	56
0,44		2,9707	0,2714	170	57
0,43		2,9877	0,2771	171	59
0,42		3,0048	0,2830	174	62
0,41		3,0222	0,2892	176	63
0,40		3,0398	0,2955	179	66
0,39		3,0577	0,3021	181	68
0,38		3,0758	0,3089	183	71
0,37		3,0941	0,3160	187	73
0,36		3,1128	0,3238	089	76
0,35	0,01	3,1317 —	$0,3309 \frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0193 —	$0,0079 \frac{\alpha U^2}{gH}$

Suite de la troisième table. $\mathfrak{t}=0$. $\mathfrak{r}=1/3$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	3,1510 —	0,3388 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0195 —	0,0083 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,33		3,1705	0,3471	199	85
0,32		3,1904	0,3556	204	90
0,31		3,2108	0,3646	207	93
0,30		3,2315	0,3739	211	97
0,29		3,2526	0,3836	216	102
0,28		3,2742	0,3938	221	107
0,27		3,2963	0,4045	227	112
0,26		3,3190	0,4157	232	117
0,25		3,3422	0,4274	238	124
0,24		3,3660	0,4398	245	130
0,23		3,3905	0,4528	253	137
0,22		3,4158	0,4665	261	145
0,21		3,4419	0,4810	269	154
0,20		3,4688	0,4964	280	164
0,19		3,4968	0,5128	290	175
0,18		3,5258	0,5303	302	186
0,17		3,5560	0,5489	317	200
0,16		3,5877	0,5689	331	215
0,15		3,6208	0,5904	349	233
0,14		3,6557	0,6137	370	253
0,13		3,6927	0,6390	393	276
0,12		3,7320	0,6666	420	303
0,11		3,7740	0,6969	454	336
0,10		3,8194	0,7305	493	376
0,09		3,8687	0,7681	543	425
0,08		3,9230	0,8106	605	487
0,07		3,9835	0,8593	687	570
0,06	0,01	4,0522	0,9163	801	682
0,05	0,002	4,1323	0,9845	177	154
0,048		4,1500	0,9999	184	160
0,046		4,1684	1,0159	192	168
0,044		4,1876	1,0327	200	176
0,042		4,2076	1,0503	209	185
0,040		4,2285	1,0688	219	196
0,038		4,2504	1,0884	230	206
0,036		4,2734	1,1090	242	218
0,034		4,2976	1,1308	256	233
0,032		4,3232	1,1541	272	248
0,030		4,3504	1,1789	289	265
0,028		4,3793	1,2054	310	286
0,026		4,4103	1,2340	333	310
0,024		4,4436	1,2650	361	337
0,022	0,002	4,4797	1,2987	395	371
0,020	0,001	4,5192	1,3358	212	200
0,019		4,5404	1,3558	222	210
0,018		4,5626	1,3768	235	223
0,017		4,5861	1,3991	249	237
0,016		4,6110	1,4228	265	253
0,015		4,6375	1,4481	282	270
0,014		4,6657	1,4751	302	291
0,013		4,6959	1,5042	327	314
0,012		4,7286	1,5356	353	342
0,011		4,7639	1,5698	0,0388 —	0,0375 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,010	0,001	4,8027 —	1,6073 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Quatrième table. Cas t = 1 (*lits trapèzes, talus de* 1 *sur* 1), r = 1/6.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	$\frac{\alpha U^2}{gH}$	Différences.	$\frac{\alpha U^2}{gH}$
3,00		0,0000 —	0,0000		
2,90	0,00	0,1012	0,0011	0,1012 —	00,011
2,80		0,2025	0,0022	1013	11
2,70		0,3040	0,0035	1015	13
2,60		0,4056	0,0050	1016	15
2,50		0,5073	0,0066	1017	16
2,40		0,6092	0,0083	1019	17
2,30		0,7114	0,0103	1022	20
2,20		0,8138	0,0125	1024	22
2,10		0,9164	0,0149	1026	24
2,00		1,0194	0,0177	1030	28
1,90		1,1227	0,0209	1033	32
1,80		1,2265	0,0245	1038	36
1,70		1,3308	0,0285	1043	40
1,60		1,4356	0,0332	1048	47
1,50		1,5412	0,0386	1056	54
1,40		1,6476	0,0448	1064	62
1,30		1,7549	0,0521	1073	73
1,20		1,8635	0,0607	1086	86
1,10	0,10	1,9736	0,0708	1101	101
1,00		2,0856	0,0830	1120	122
0,95	0,05	2,1425	0,0900	569	70
0,90		2,2000	0,0978	575	78
0,85		2,2583	0,1064	583	86
0,80		2,3175	0,1159	592	95
0,75		2,3777	0,1265	602	106
0,70		2,4391	0,1385	614	120
0,65		2,5019	0,1520	628	135
0,60		2,5663	0,1674	644	154
0,55	0,05	2,6327	0,1849	664	175
0,50		2,7015	0,2052	688	203
0,49	0,01	2,7156	0,2096	141	44
0,48		2,7298	0,2142	142	46
0,47		2,7442	0,2189	144	47
0,46		2,7587	0,2238	145	49
0,45		2,7733	0,2288	146	50
0,44		2,7880	0,2340	147	52
0,43		2,8030	0,2394	150	54
0,42		2,8181	0,2449	151	55
0,41		2,8333	0,2507	152	58
0,40		2,8488	0,2566	155	59
0,39		2,8644	0,2628	156	62
0,38		2,8803	0,2692	159	64
0,37		2,8963	0,2759	160	67
0,36		2,9126	0,2828	163	69
0,35	0,01	2,9291 —	0,2900	165	72
				0,0168 —	0,0074

Suite de la quatrième table. $t = 1$, $r = 1/6$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	2,9459 —	0,2974 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		
0,33		2,9629	0,3052	0,0170 —	0,0078 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,32		2,9802	0,3133	173	81
0,31		2,9378	0,3218	176	85
0,30		3,0158	0,3306	180	88
0,29		3,0341	0,3398	183	92
0,28		3,0528	0,3495	187	97
0,27		3,0719	0,3596	191	101
0,26		3,0914	0,3702	195	106
0,25		2,1114	0,3814	200	112
0,24		3,1319	0,3932	205	118
0,23		3,1529	0,4056	210	124
0,22		3,1746	0,4187	217	131
0,21		3,1969	0,4326	223	139
0,20		3,2200	0,4473	231	147
0,19		3,2438	0,4629	238	156
0,18		3,2686	0,4796	248	167
0,17		3,2944	0,4975	258	179
0,16		3,3212	0,5166	268	191
0,15		3,3494	0,5372	282	206
0,14		3,3790	0,5595	296	223
0.13		3,4103	0,5838	313	243
0,12		3,4435	0,6103	332	265
0,11		3,4790	0,6394	355	291
0,10		3,5172	0,6718	382	324
0,09		3,5587	0,7079	415	361
0,08		3,6043	0,7488	456	409
0,07		3,6550	0,7957	507	469
0,06		3,7125	0,8505	575	548
0,05	0,01	3,7794	0,9162	669	657
0,048	0,002	3,7942	0,9310	148	148
0,046		3,8096	0,9465	154	155
0,044		3,8256	0,9627	160	162
0,042		3,8422	0,9797	166	170
0,040		3,8596	0,9975	174	178
0,038		3,8779	1,0163	183	188
0,036		3,8970	1,0362	191	199
0,034		3,9172	1,0573	202	211
0,032		3,9385	1,0797	213	224
0,030		3,9611	1,1036	226	239
0,028		3,9852	1,1292	241	256
0,026		4,0110	1,1568	258	276
0,024		4,0387	1,1867	277	299
0,022		4,0687	1,2192	300	325
0,020	0,001	4,1014	1,2549	327	357
0,019	0,002	4,1190	1,2742	176	193
0,018		4,1375	1,2945	185	203
0,017		4,1570	1,3161	195	216
0,016		4,1777	1,3389	207	228
0,015		4,1996	1,3633	219	244
0,014		4,2230	1,3894	234	261
0,013		4,2481	1,4174	251	280
0,012		4,2752	1,4477	271	303
0,011		4,3045	1,4807	298	330
0,010	0,001	4,3366 —	1,5169 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0321 —	0,00382 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Cinquième table. $t=1$ (*lits trapèzes, talus* 1 *sur* 1), $r=1/3$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
			$\frac{\alpha U^2}{gH}$		$\frac{\alpha U^2}{gH}$
3,00		0,0000 —	0,0000 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		
2,90	0,00	0,1007	0,0007	0,1007 —	0,0007 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
2,80		0,2015	0,0015	1008	8
2,70		0,3023	0,0023	1008	8
2,60		0,4032	0,0033	1009	10
2,50		0,5043	0,0044	1011	11
2,40		0,6055	0,0056	1012	12
2,30		0,7068	0,0070	1013	14
2,20		0,8083	0,0085	1015	15
2,10		0,9100	0,0103	1017	18
2,00		1,0119	0,0123	1019	20
1,90		1,1141	0,0147	1022	24
1,80		1,2166	0,0174	1025	27
1,70		1,3195	0,0205	1029	31
1,60		1,4229	0,0241	1034	36
1,50		1,5268	0,0284	1039	43
1,40		1,6313	0,0334	1045	50
1,30		1,7366	0,0394	1053	60
1,20		1,8429	0,0465	1063	71
1,10		1,9505	0,0551	1076	86
1,00	0,10	2,0597	0,0656	1092	105
0,95	0,01	2,1150	0,0717	553	61
0,90		2,1708	0,0785	558	68
0,85		2,2273	0,0861	565	76
0,80		2,2846	0,0947	573	86
0,75		2,3428	0,1044	582	97
0,70		2,4020	0,1153	592	109
0,65		2,4624	0,1278	604	125
0,60		2,5243	0,1421	619	143
0,55		2,5880	0,1587	637	166
0,50	0,05	2,6537	0,1780	657	193
0,49	0,01	2,6672	0,1822	135	42
0,48		2,6808	0,1866	136	44
0,47		2,6945	0,1911	137	45
0,46		2,7083	0,1958	138	47
0,45		2,7222	0,2006	139	48
0,44		2,7362	0,2056	140	50
0,43		2,7504	0,2108	142	52
0,42		2,7648	0,2162	144	54
0,41		2,7793	0,2218	145	56
0,40		2,7940	0,2276	147	58
0,39		2,8088	0,2336	148	60
0,38		2,8238	0,2399	150	63
0,37		2,8391	0,2464	153	65
0,36		2,8545	0,2532	154	68
0,35		2,8701 —	0,2602 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	156	70
	0,01			0,0159 —	0,0074 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Suite de la cinquième table. $t=1$, $r=1/3$.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	2,8860	— 0,2676 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		
0,33		2,9021	0,2753	0,0161	— 0,0077 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,32		2,9185	0,2833	164	80
0,31		2,9351	0,2917	166	84
0,30		2,9521	0,3004	170	87
0,29		2,9693	0,3096	172	92
0,28		2,9869	0,3192	176	96
0,27		3,0049	0,3293	180	101
0,26		3,0233	0,3400	184	107
0,25		3,0421	0,3512	188	112
0,24		3,0614	0,3630	193	118
0,23		3,0812	0,3755	198	125
0,22		3,1015	0,3887	203	132
0,21		3,1224	0,4027	209	140
0,20		3,1440	0,4176	216	149
0,19		3,1664	0,4335	224	159
0,18		3,1896	0,4504	232	169
0,17		3,2137	0,4686	241	182
0,16		3,2388	0,4881	251	195
0,15		3,2651	0,5092	263	211
0,14		3,2927	0,5320	276	228
0,13		3,3218	0,5569	291	249
0,12		3,3528	0,5841	310	272
0,11		3,3858	0,6141	330	300
0,10		3,4213	0,6475	355	334
0,09		3,4599	0,6848	386	373
0,08		3,5022	0,7272	423	424
0,07		3,5492	0,7758	470	486
0,06		3,6025	0,8329	533	571
0,05	0,01	3,6644	0,9013	619	684
0,048	0,002	3,6778	0,9167	134	154
0,046		3,6920	0,9328	142	161
0,044		3,7068	0,9497	148	169
0,042		3,7222	0,9675	154	178
0,040		3,7383	0,9861	161	186
0,038		3,7552	1,0058	169	197
0,036		3,7729	1,0266	177	208
0,034		3,7915	1,0486	186	220
0,032		3,8112	1,0720	197	234
0,030		3,8321	1,0970	209	250
0,028		3,8548	1,1239	222	269
0,026		3,8781	1,1528	238	289
0,024		3,9037	1,1840	256	312
0,022	0,001	3,9314	1,2181	277	341
0,020		3,9616	1,2556	302	375
0,019	0,002	3,9778	1,2758	162	202
0,018		3,9949	1,2971	171	213
0,017		4,0129	1,3197	180	226
0,016		4,0319	1,3437	190	240
0,015		4,0521	1,3693	202	256
0,014		4,0737	1,3966	216	273
0,013		4,0969	1,4261	232	295
0,012		4,1218	1,4579	249	318
0,011		4,1489	1,4926	271	347
0,010	0,001	4,1785	— 1,5306 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0296	— 0,0380 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Sixième table. t = 2 (*lits trapezes, talus 2 sur 1*), r = 1,6.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	Différences.
3,00		0,0000 — 0,0000 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	
2,90	0,00	0,1007 0,0007	0,1007 — 0,0007 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
2,80		0,2014 0,0015	1007 8
2,70		0,3022 0,0023	1008 8
2,60		0,4031 0,0033	1009 10
2,50		0,5040 0,0044	1009 11
2,40		0,6051 0,0056	1011 12
2,30		0,7064 0,0070	1013 14
2,20		0,8078 0,0085	1014 15
2,10		0,9094 0,0103	1016 18
2,00		1,0112 0,0123	1018 20
1,90		1,1133 0,0147	1021 24
1,80		1,2157 0,0174	1024 27
1,70		1,3184 0,0205	1027 31
1,60		1,4216 0,0241	1032 36
1,50		1,5253 0,0284	1037 43
1,40		1,6296 0,0334	1043 50
1,30		1,7347 0,0393	1051 59
1,20		1,8408 0,0464	1061 71
1,10	0,10	1,9480 0,0550	1072 86
1,00		2,0568 0,0654	1088 104
0,95	0,05	2,1119 0,0715	551 61
0,90		2,1675 0,0783	556 68
0,85		2,2238 0,0859	563 76
0,80		2,2808 0,0945	570 86
0,75		2,3387 0,1041	579 96
0,70		2,3976 0,1150	589 109
0,65		2,4576 0,1274	600 124
0,60		2,5191 0,1416	515 142
0,55	0,05	2,5823 0,1580	632 164
0,50		2,6476 0,1772	653 192
0,49	0,01	2,6610 0,1814	134 42
0,48		2,6745 0,1857	135 43
0,47		2,6880 0,1902	135 45
0,46		2,7017 0,1949	137 47
0.45		2,7155 0,1997	138 48
0,44		2,7295 0,2046	140 49
0,43		2,7436 0,2098	141 52
0,42		2,7578 0,2151	142 53
0,41		2,7722 0,2207	144 56
0,40		2,7867 0,2264	145 57
0,39		2,8014 0,2324	147 60
0,38		2,8163 0,2386	149 62
0,37		2,8314 0,2451	151 65
0,36		2,8467 0,2518	153 67
0,35	0,01	2,8622 — 0,2588 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	155 70
			0,0157 — 0,0072 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Suite de la sixième table.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$		Différences.	
0,34	0,01	2,8779 —	0,2660 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		
0,33		2,8938	0,2736	0,0159 —	0,0076 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,32		2,9100	0,2816	162	80
0,31		2,9265	0,2899	165	83
0,30		2,9433	0,2985	168	86
0,29		2,9604	0,3076	171	91
0,28		2,9778	0,3172	174	96
0,27		2,9956	0,3272	178	100
0,26		3,0138	0,3377	182	105
0,25		3,0324	0,3487	186	110
0,24		3,0514	0,3604	190	117
0,23		3,0710	0,3727	196	123
0,22		3,0911	0,3858	201	131
0,21		3,1118	0,3997	207	139
0,20		3,1331	0,4144	213	147
0,19		3,1552	0,4300	221	156
0,18		3,1781	0,4468	229	168
0,17		3,2018	0,4647	237	179
0,16		3,2266	0,4840	248	193
0,15		3,2526	0,5048	260	208
0,14		3,2798	0,5273	272	225
0,13		3,3086	0,5518	288	245
0,12		3,3391	0,5787	305	269
0,11		3,3716	0,6083	325	296
0,10		3,4066	0,6411	350	328
0,09		3,4446	0,6779	380	368
0,08		3,4863	0,7197	417	418
0,07		3,5326	0,7676	463	479
0,06		3,5851	0,8237	525	561
0,05	0,01	3,6461	0,8911	610	674
0,048	0,002	3,6595	0,9063	134	152
0,046		3,6785	0,9222	140	159
0,044		3,6881	0,9388	146	166
0,042		3,7032	0,9562	151	174
0,040		3,7191	0,9746	159	184
0,038		3,7357	0,9939	166	193
0,036		3,7531	1,0143	174	204
0.034		3,7714	1,0360	183	217
0,032		3,7908	1,0591	194	231
0,030		3,8113	1,0837	205	246
0,028		3,8332	1,1101	219	264
0,026		3,8566	1,1385	234	284
0,024		3,8818	1,1692	252	307
0,022		3,9090	1,2028	272	336
0,020	0,001	3,9387	1,2396	297	368
0,019	0,002	3,9546	1,2595	159	199
0,018		3,9714	1,2805	168	210
0,017		3,9891	1,3027	177	222
0,016		4,0078	1,3262	187	235
0,015		4,0277	1,3514	199	252
0,014		4,0490	1,3783	213	269
0,013		4,0717	1,4072	227	289
0,012		4,0962	1,4385	245	313
0,011		4,1228	1,4726	266	341
0,010	0,001	4,1519 —	1,5100 $\frac{\alpha U^3}{gH}$	0,0291 —	0,0374 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Tables donnant les remous ou relèvements d'eau y.

Septième table. t = 2 (*lits trapèzes, talus* 2 *sur* 1), r = 1/3.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	[coefficient of $\frac{\alpha U^2}{gH}$]	Différences.	[coefficient of $\frac{\alpha U^2}{gH}$]
3,00	0,00	0,0000 —	0,0000 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,1003 —	0,0003 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
2,90		0,1003	0,0003	1003	4
2,80		0,2006	0,0007	1003	5
2,70		0,3009	0,0012	1004	5
2,60		0,4013	0,0017	1004	6
2,50		0,5017	0,0023	1005	6
2,40		0,6022	0,0029	1006	8
2,30		0,7028	0,0037	1006	9
2,20		0,8034	0,0046	1008	10
2,10		0,9042	0,0056	1008	12
2,00		1,0050	0,0068	1010	14
1,90		1,1060	0,0082	1012	16
1,80		1,2072	0,0098	1014	19
1,70		1,3086	0,0117	1016	23
1,60		1,4102	0,0140	1019	27
1,50		1,5121	0,0167	1023	33
1,40		1,6144	0,0200	1028	40
1,30		1,7172	0,0240	1034	49
1,20		1,8206	0,0289	1042	61
1,10	0,10	1,9248	0,0350	1052	77
1,00		2,0300	0,0427	530	45
0,95	0,05	2,0830	0,0472	535	52
0,90		2,1365	0,0524	539	58
0,85		2 1904	0,0582	544	67
0,80		2,2448	0,0649	551	76
0,75		2,2999	0,0725	557	88
0,70		2,3556	0,0813	567	101
0,65		2,4123	0,0914	577	119
0,60		2,4700	0,1033	590	139
0,55	0,05	2,5290	0,1172	606	165
0,50		2,5896	0,1337	124	36
0,49	0,01	2,6020	0,1373	124	38
0,48		2,6144	0,1411	126	39
0,47		2,6270	0,1450	126	41
0,46		2,6396	0,1491	127	42
0,45		2,6523	0,1533	128	44
0,44		2,6651	0,1577	129	46
0,43		2,6780	0,1623	130	48
0,42		2,6910	0,1671	132	49
0,41		2,7042	0,1720	133	52
0,40		2,7175	0,1772	134	54
0,39		2,7309	0,1826	135	56
0,38		2,7444	0,1882	137	58
0,37		2,7581	0,1940	139	61
0,36		2,7720	0,2001	141	64
0,35	0,01	2,7861 —	0,2065 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0142 —	0,0067 $\frac{\alpha U^2}{gH}$

Suite de la septième table.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	Différences.	$\frac{is}{H}$ ou	$\frac{is_0}{H}$	Différences.	
0,34	0,01	2,8003 —	0,2132 $\frac{\alpha U^2}{gH}$	0,0144 —	0,0070 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,33		2,8147	0,2202	146	73
0,32		2,8293	0,2275	148	77
0,31		2,8441	0,2352	151	81
0,30		2,8592	0,2433	153	84
0,29		2,8745	0,2517	156	90
0,28		2,8901	0,2607	158	94
0,27		2,9059	0,2701	162	99
0,26		2,9221	0,2800	166	105
0,25		2,9387	0,2905	169	111
0,24		2,9556	0,3016	173	117
0,23		2,9729	0,3138	178	125
0,22		2,9907	0,3258	182	133
0,21		3,0089	0,3391	188	142
0,20		3,0277	0,3538	194	152
0,19		3,0471	0,3685	200	162
0,18		3,0671	0,3847	208	175
0,17		3,0879	0,4022	216	189
0,16		3,1095	0,4211	226	204
0,15		3,1321	0,4415	236	222
0,14		3,1557	0,4637	249	243
0,13		3,1806	0,4880	263	266
0,12		3,2069	0,5146	280	295
0,11		3,2349	0,5441	300	329
0,10		3,2649	0,5770	325	369
0,09		3,2974	0,6139	356	420
0,08		3,3330	0,6550	394	485
0,07		3,3724	0,7044	446	570
0,06	0,01	3,4170	0,7614	515	686
0,05	0,002	3,4685	0,8300	114	155
0,048		3,4799	0,8455	118	162
0,046		3,4917	0,8617	123	170
0,044		3,5040	0,8787	128	178
0,042		3,5168	0,8965	133	188
0,040		3,5301	0,9153	140	198
0,038		3,5441	0,9351	146	210
0,036		3,5587	0,9561	155	222
0,034		3,5742	0,9783	162	237
0,032		3,5904	1,0020	173	253
0,030		3,6077	1,0273	183	271
0,028		3,6260	1,0544	196	292
0,026		3,6456	1,0836	211	317
0,024		3,6667	1,1153	228	345
0,022	0,001	3,6895	1,1498	249	380
0,020	0,002	3,7144	1,1878	134	205
0,019		3,7278	1,2083	140	217
0,018		3,7418	1,2300	148	229
0,017		3,7566	1,2520	156	243
0,016		3,7722	1,2772	167	260
0,015		3,7889	1,3032	177	278
0,014		3,8066	1,3310	190	300
0,013		3,8256	1,3610	205	323
0,012		3,8461	1,3933	222	353
0,011	0,001	3,8683	1,4286	0,0243 —	0,0387 $\frac{\alpha U^2}{gH}$
0,010		3,8925 —	1,4673 $\frac{\alpha U^2}{gH}$		

38. *Observation sur l'influence du terme provenant de la variation de force vive des tranches fluides.— Cours d'eau approchant d'être torrentueux. Distinction analytique des torrents.*

On voit à ces tables que chaque valeur de $\frac{is}{H}$ ou de la distance s d'un point particulier au point $\frac{y}{H}=3$, multipliée par la pente de fond et divisée par la profondeur de régime uniforme, se trouve composée de deux parties, dont l'une est constante et positive, et dont l'autre, affectée du rapport $\alpha\frac{U^2}{gH}$ et négative, représente l'effet de l'inertie du fluide ou ce qui provient du terme $d.\alpha\frac{U^2}{2g}$ qui entre dans l'équation du mouvement, pour peu qu'il ne soit pas uniforme (art. 34). Cette partie, dont M. Dupuit n'a pas tenu compte, peut bien être négligeable pour des cours d'eau déjà profonds et tranquilles avant le relèvement, mais elle ne l'est plus dès que $\frac{\alpha U^2}{gH}$ atteint la valeur $\frac{1}{10}$, ce qui est très-fréquent, et elle devient très-influente pour les cours d'eau *qui approchent d'être torrentueux*, ou pour lesquels le rapport $\frac{U^2}{gH}$ de la hauteur $\frac{U^2}{2g}$ due à la vitesse multipliée par le coefficient α (que l'on a coutume de faire $=1,1$), à la demi-profondeur $\frac{1}{2}$H, approche d'être égal à l'unité. On voit même, par la colonne des différences,

que si $\alpha \frac{U^2}{gH}$ est égal à 1, la seconde partie tend de plus en plus à égaler et même à surpasser la première à mesure que l'on considère des distances $s - s_o$ entre points pour lesquels le gonflement est plus petit. Par exemple, entre le gonflement $y = 0{,}02 \cdot H$ et le gonflement $y = 0{,}01 \cdot H$, la distance $s - s_o$ relative aux courants très-larges, ou à $r = 0$, première table, est $\frac{H}{i}\left(0{,}2450 - 0{,}2347 \frac{\alpha U^2}{2g}\right)$ et se réduit à $0{,}0103 \frac{H}{i}$, c'est-à-dire à fort peu de chose, si l'on a $\frac{\alpha U^2}{gH} = 1$.

On sait d'ailleurs que la formule, intégrée comme nous avons fait, cesse de s'appliquer lorsque $\alpha \frac{U^2}{2g} > 1$ pour les lits rectangulaires, et nous verrons (art. 41) qu'il en est de même pour les lits à section trapèze lorque $\alpha \frac{U^2}{gH} > \frac{1}{1 + rt}$. Alors le gonflement se termine par un ressaut dont M. Belanger a donné l'explication, et appris à calculer la position et la hauteur.

Ce caractère analytique $\alpha \frac{U^2}{gH} > \frac{1}{1 + rt}$ de courants se comportant autrement que ceux pour lesquels $\alpha \frac{U^2}{gH} < \frac{1}{1 + rt}$ me paraît offrir la meilleure distinction des *torrents*, dont les diverses parties semblent couler indépendamment les unes des autres et qui surmontent les petits obstacles

en vertu de leur vitesse acquise, et des *rivières* ou courants tranquilles dont les tranches successives s'appuient l'une sur l'autre et marchent solidairement, en sorte qu'ils ne franchissent les obstacles qu'au moyen du poids de l'eau relevée, et que tout relèvement dans une portion se fait sentir en amont jusqu'à une distance indéfinie.

39. *Autres tables applicables à toute valeur du rapport* r *comprise entre zéro et* 1/3.

Lorsque le rapport r de la profondeur à la largeur d'eau primitive ne sera pas très-proche ou de zéro ou de 1/6 ou de 1/3, il faudra, pour avoir une valeur de $\frac{is}{H}$, intercaler entre les chiffres des diverses tables de l'art. 37, dont la première convient à $t = 1$ ou $t = 2$ comme à $t = 0$.

On pourra le faire par différences proportionnelles. Mais on aura un résultat sensiblement plus approché sans se donner plus de peine, en interpolant paraboliquement, eu égard à ce que les différences entre les valeurs de $\frac{is}{H}$ relatives à $r = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{6}$ ne sont point égales aux différences entre celles relatives à $r = 1/6$ et $r = 0$.

A cet effet, on se servira des trois tables suivantes, où l'interpolation est tout opérée, et où l'on n'a plus qu'à mettre pour r sa valeur quelle qu'elle soit.

Voici comment on les a dressées.

Appelons $\frac{is}{H}(r0)$, $\frac{is}{H}\left(r\frac{1}{6}\right)$, $\frac{is}{H}\left(r\frac{1}{3}\right)$ les valeurs

de $\frac{is}{H}$ données par les tables de l'article 37 pour $r=0$, $r=\frac{1}{6}$, $r=\frac{1}{3}$ et pour une même valeur de $\frac{y}{H}$. Nous aurons pour $\frac{is}{H}$ une valeur générale du second degré en r donnant respectivement ces trois valeurs particulières pour $r=0$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$ si, en posant :

$$\frac{is}{H}\left(r\frac{1}{6}\right)-\frac{is}{H}(ro)=\Delta_o,\ \frac{is}{H}\left(r\frac{1}{3}\right)-\frac{is}{H}(ro)=\Delta\frac{1}{6},$$

nous prenons :

$$(47)\quad \frac{is}{H}=\frac{is}{H}(ro)+\left(9\Delta_o-3\Delta\frac{1}{6}\right)r+18\left(\Delta\frac{1}{6}-\Delta_o\right)r^2.$$

C'est en mettant dans cette équation, qui n'est autre chose que celle donnée par la formule ordinaire de l'interpolation, les différences Δ prises avec une décimale de plus qu'aux tables de l'art. 37 (*), que nous avons obtenu les tables ci-après.

On n'aura plus, dans chaque cas, qu'à mettre pour le rapport r sa valeur quelle qu'elle soit (pourvu qu'elle n'excède pas 1/3 ou 2/5 au plus, car au delà les résultats ne seraient pas certains), ce qui se fera très-promptement en n'écrivant que quatre décimales des différents termes.

(*) Il y a une erreur en plus, de 0,001, aux chiffres de la seconde partie de la colonne $\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_o}{H}$ de la troisième table, page 310, depuis celui qui répond à $\frac{y}{H}=0,05$ jusqu'au bas. Ainsi, le dernier doit être 1,6073 au lieu de 1,6083, et de même pour les vingt-cinq autres.

Table donnant les remous ou relèvements d'eau* y *à une distance quelconque* s — s₀ *en amont d'un barrage qui en produit un* y₀ *dans un courant ayant une pente de fond* i, *une profondeur* H *dans l'état primitif ou uniforme, avec un rapport* r *entre cette profondeur et la largeur d'eau moyenne dans le même état.

***Première table, talus* t = o (*lits rectangulaires*).**

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$											
		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.
3,00	0,0000	+	0,0000 r —		0,000 r² — $\frac{\alpha U^2}{gH}$ (		0,0000	+	0,0000 r —		0,000 r²)	
2,90	0,1019	1019	0,0102	102	0,010	10	0,0017	17	0,0002	2	0,000	0
2,80	0,2039	1020	0,0208	106	0,020	10	0,0034	17	0,0004	2	0,000	0
2,70	0,3061	1022	0,0320	112	0,031	11	0,0054	20	0,0006	2	0,001	1
2,60	0,4085	1024	0,0437	117	0,042	11	0,0075	21	0,0008	2	0,001	0
2,50	0,5110	1025	0,0559	122	0,054	12	0,0098	23	0,0011	3	0,001	0
2,40	0,6138	1028	0,0687	128	0,066	12	0,0123	25	0,0014	3	0,001	0
2,30	0,7169	1031	0,0823	136	0,079	13	0,0150	27	0,0017	3	0,002	1
2,20	0,8202	1033	0,0965	142	0,093	14	0,0180	30	0,0021	4	0,002	0
2,10	0,9239	1037	0,1115	150	0,108	15	0,0214	34	0,0026	5	0,003	1
2,00	1,0280	1041	0,1272	157	0,123	15	0,0250	36	0,0032	6	0,003	0
1,90	1,1325	1045	0,1439	167	0,139	16	0,0291	41	0,0039	7	0,004	1
1,80	1,2375	1050	0,1616	177	0,155	16	0,0336	45	0,0047	8	0,005	1
1,70	1,3431	1056	0,1804	188	0,173	18	0,0387	51	0,0056	9	0,005	0
1,60	1,4493	1062	0,2004	200	0,192	19	0,0444	57	0,0067	11	0,006	1
1,50	1,5563	1070	0,2217	213	0,212	20	0,0509	65	0,0080	13	0,008	2
1,40	1,6643	1080	0,2445	228	0,234	22	0,0582	73	0,0095	15	0,009	1
1,30	1,7734	1091	0,2690	245	0,257	23	0,0667	85	0,0113	18	0,010	1
1,20	1,8838	1104	0,2955	265	0,282	25	0,0764	97	0,0136	23	0,013	3
1,10	1,9959	1121	0,3243	288	0,309	27	0,0877	113	0,0166	30	0,016	3
1,00	2,1101	1142	0,3555	312	0,337	28	0,1009	132	0,0202	36	0,019	3
0,95	2,1681	580	0,3721	166	0,352	15	0,1085	76	0,0224	22	0,021	2
0,90	2,2268	587	0,3896	175	0,368	16	0,1167	82	0,0248	24	0,023	2
0,85	2,2864	596	0,4081	185	0,385	17	0,1257	90	0,0275	27	0,026	3
0,80	2,3470	606	0,4276	195	0,402	17	0,1357	100	0,0307	32	0,028	2
0,75	2,4086	616	0,4482	206	0,421	19	0,1467	110	0,0344	37	0,032	4
0,70	2,4714	628	0,4699	217	0,440	19	0,1590	123	0,0386	42	0,035	3
0,65	2,5358	644	0,4929	230	0,461	21	0,1727	137	0,0435	49	0,040	5
0,60	2,6019	661	0,5174	245	0,483	22	0,1881	154	0,0492	57	0,045	5
0,55	2,6701	682	0,5439	265	0,506	23	0,2056	175	0,0560	68	0,051	6
0,50	2,7409	708	0,5726	287	0,531	25	0,2255	199	0,0642	82	0,058	7
0,49	2,7554	145	0,5786	60	0,537	6	0,2299	44	0,0661	19	0,060	2
0,48	2,7700	146	0,5847	61	0,542	5	0,2344	45	0,0680	19	0,062	2
0,47	2,7848	148	0,5909	62	0,547	5	0,2390	46	0,0699	19	0,063	1
0,46	2,7997	149	0,5972	63	0,553	6	0,2437	47	0,0719	20	0,065	2
0,45	2,8147	150	0,6036	64	0,559	6	0,2486	49	0,0740	21	0,067	2
0,44	2,8299	152	0,6101	65	0,564	5	0,2536	50	0,0761	21	0,069	2
0,43	2,8453	154	0,6169	68	0,570	6	0,2588	52	0,0784	23	0,071	2
0,42	2,8609	156	0,6237	68	0,575	5	0,2642	54	0,0808	24	0,073	2
0,41	2,8767	158	0,6306	69	0,581	6	0,2698	56	0,0832	24	0,075	2
0,40	2,8926	159	0,6377	71	0,588	7	0,2755	57	0,0858	26	0,077	2
0,39	2,9087	161	0,6450	73	0,594	6	0,2814	59	0,0885	27	0,079	2
0,38	2,9250	163	0,6525	75	0,601	7	0,2876	62	0,0913	28	0,082	3
0,37	2,9415	165	0,6602	77	0,607	6	0,2940	64	0,0942	29	0,084	2
0,36	2,9583	168	0,6680	78	0,614	7	0,3006	66	0,0972	30	0,087	3
0,35	2,9754	171 +	0,6760 r —	80	0,621 r² — $\frac{\alpha U^2}{gH}$ (	7	0,3074	68 +	0,1001 r —	32	0,090 r²)	3

Suite de la première table. Talus t = 0.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y^o}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_o}{H}$											
		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.
0,35	2,9754	+	0,6760 r	−	0,621 r²	$-\frac{\alpha U^2}{gH}$	(0,3074	+	0,1004 r²	−	0,090	r³)
0,34	2,9927	173	1,6841	81	0,628	7	0,3145	71	0,1038	34	0,093	3
0,33	3,0103	176	0,6923	82	0,635	7	0,3219	74	0,1073	35	0,096	3
0,32	3,0282	179	0,7008	85	0,642	7	0,3296	77	0,1110	37	0,099	3
0,31	3,0464	182	0,7097	89	0,649	7	0,3376	80	0,1149	39	0,102	3
0,30	3,0649	185	0,7188	91	0,657	8	0,3460	84	0,1190	41	0,105	3
0,29	8,0839	190	0,7281	93	0,665	8	0,3547	87	0,1233	43	0,109	4
0,28	3,1032	193	0,7377	96	0,673	8	0,3638	91	0,1278	45	0,113	4
0,27	3,1229	197	0,7475	98	0,681	8	0,3733	95	0,1325	47	0,117	4
0,26	3,1431	202	0,7577	102	0,690	9	0,3833	100	0,1375	50	0,121	4
0,25	3,1638	207	0,7683	106	0,699	9	0,3937	104	0,1430	55	0,126	5
0,24	3,1850	212	0,7792	109	0,708	9	0,4047	110	0,1488	58	0,131	5
0,23	3,2068	218	0,7905	113	0,718	10	0,4163	116	0,1548	60	0,136	5
0,22	3,2292	224	0,8022	117	0,728	10	0,4285	122	0,1611	63	0,141	5
0,21	3,2524	232	0,8144	122	0,738	10	0,4414	129	0,1678	67	0,147	6
0,20	3,2763	239	0,8272	128	0,748	10	0,4551	137	0,1751	73	0,153	6
0,19	3,3010	247	0,8405	133	0,759	11	0,4696	145	0,1829	78	0,159	6
0,18	3,3266	256	0,8545	140	0,771	12	0,4850	154	0,1913	84	0,166	7
0,17	3,3533	267	0,8692	147	0,783	12	0,5014	164	0,2003	90	0,174	8
0,16	3,3812	279	0,8846	154	0,795	13	0,5190	176	0,2101	98	0,182	8
0,15	3,4104	292	0,9009	163	0,809	13	0,5380	190	0,2207	106	0,190	8
0,14	3,4411	307	0,9183	174	0,824	15	0,5585	205	0,2322	115	0,200	10
0,13	3,4736	325	0,9368	185	0,839	15	0,5807	222	0,2449	127	0,210	10
0,12	3,5081	345	0,9567	199	0,856	17	0,6049	242	0,2589	140	0,222	12
0,11	3,5450	369	0,9781	214	0,873	17	0,6315	266	0,2743	154	0,234	12
0,10	3,5847	397	1,0014	233	0,892	19	0,6610	295	0,2916	173	0,249	15
0,09	3,6278	431	1,0268	254	0,912	20	0,6938	328	0,3110	194	0,264	15
0,08	3,6752	474	1,0553	285	0,936	24	0,7309	371	0,3332	222	0,282	18
0,07	3,7280	528	1,0872	319	0,961	25	0,7734	425	0,3588	256	0,303	21
0,06	3,7877	597	1,1243	371	0,992	31	0,8230	496	0,3890	302	0,327	24
0,05	3,8573	696	1,1670	427	1,027	35	0,8823	593	0,4255	365	0,356	29
0,048	3,8727	154	1,1766	96	1,034	7	0,8956	133	0,4338	83	0,363	3
0,046	3,8887	160	1,1865	99	1,042	8	0,9095	139	0,4425	87	0,370	7
0,044	3,9053	166	1,1967	102	1,050	8	0,9241	146	0,4515	90	0,378	5
0,042	3,9227	174	1,2073	106	1,058	8	0,9394	153	0,4610	95	0,385	7
0,040	3,9408	181	1,2188	115	1,068	10	0,9555	161	0,4711	101	0,393	8
0,038	3,9598	190	1,2308	120	1,078	10	0,9724	169	0,4817	106	0,402	9
0,036	3,9798	200	1,2433	125	1,088	10	0,9903	179	0,4929	112	0,411	9
0,034	4,0008	210	1,2565	132	1,098	10	1,0093	190	0,5048	119	0,420	9
0,032	4,0230	222	1,2704	139	1,109	11	1,0294	201	0,5174	126	0,430	10
0,030	4,0465	235	1,2853	149	1,121	12	1,0509	215	0,5310	136	0,441	11
0,028	4,0716	251	1,3012	159	1,134	13	1,0739	230	0,5455	145	0,453	12
0,026	4,0984	268	1,3181	169	1,147	13	1,0987	248	0,5612	157	0,466	13
0,024	4,1273	289	1,3364	183	1,162	15	1,1255	268	0,5782	170	0,479	13
0,022	4,1585	312	1,3562	198	1,178	16	1,1547	292	0,5968	186	0,494	15
0,020	4,1927	342	1,3778	216	1,194	16	1,1868	321	0,6172	204	0,510	16
0,019	4,2110	183	1,3897	119	1,205	11	1,2040	172	0,6282	110	0,519	9
0,018	4,2303	193	1,4020	123	1,214	9	1,2223	183	0,6398	116	0,528	9
0,017	4,2506	203	1,4149	129	1,225	11	1,2416	193	0,6521	123	0,538	10
0,016	4,2721	215	1,4287	138	1,236	11	1,2620	204	0,6652	131	0,548	10
0,015	4,2949	228	1,4434	147	1,247	11	1,2838	218	0,6792	140	0,559	11
0,014	4,3193	244	1,4590	156	1,260	13	1,3072	234	0,6941	149	0,571	12
0,013	4,3455	262	1,4756	166	1,273	13	1,3323	251	0,7102	161	0,584	13
0,012	4,3737	282	1,4936	180	1,287	14	1,3595	272	0,7276	174	0,598	14
0,011	4,4013	306	1,5132	196	1,302	15	1,3891	296	0,7465	189	0,613	15
		334		222		19		324		214		18
0,010	4,4377	+	1,5354 r	−	1,321 r²	$-\frac{\alpha U^2}{gH}$	(1,4215	+	0,7679 r²	−	0,631	r³)

Deuxième table. Talus t = 1 sur 1.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	diff.		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.
3,00	0,0000	—	0,0000	r +	0,000	$r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}$ (	0,0000	—	0,0000	r +	0,000	r^2)
2,90	0,1019	1019	0,0045	45	0,003	3	0,0017	17	0,0042	42	0,004	4
2,80	0,2039	1020	0,0092	47	0,006	3	0,0034	17	0,0085	43	0,008	4
2,70	0,3061	1022	0,0141	49	0,008	2	0,0054	20	0,0130	45	0,012	4
2,60	0,4085	1024	0,0192	51	0,011	3	0,0075	21	0,0177	47	0,015	3
2,50	0,5110	1025	0,0245	53	0,013	2	0,0098	23	0,0225	48	0,019	4
2,40	0,6138	1028	0,0302	57	0,015	2	0,0123	25	0,0276	51	0,022	3
2,30	0,7169	1031	0,0360	58	0,017	2	0,0150	27	0,0328	52	0,026	4
2,20	0,8202	1033	0,0420	60	0,019	2	0,0180	30	0,0382	54	0,029	3
2,10	0,9239	1037	0,0483	63	0,020	1	0,0214	34	0,0438	56	0,032	3
2,00	1,0280	1041	0,0549	66	0,020	0	0,0250	36	0,0496	58	0,035	3
1,90	1,1325	1045	0,0618	69	0,020	0	0,0291	41	0,0555	59	0,037	2
1,80	1,2375	1050	0,0690	72	0,019	−1	0,0336	45	0,0615	60	0,038	1
1,70	1,3431	1056	0,0766	76	0,018	1	0,0387	51	0,0677	62	0,039	1
1,60	1,4495	1062	0,0846	80	0,016	2	0,0444	57	0,0740	63	0,039	0
1,50	1,5563	1070	0,0930	84	0,013	3	0,0509	65	0,0803	63	6,038	−1
1,40	1,6643	1080	0,1018	88	0,008	5	0,0582	73	0,0865	62	0,036	2
1,30	1,7734	1091	0,1112	94	0,003	5	0,0667	85	0,0928	63	0,033	3
		1104		97		8		97		59		6
1,20	1,8838	—	0,1209	r —	0,005	$r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}$ (	0,0764	—	0,0987	r +	0,027	r^2)
1,10	1,9959	1121	0,1311	102	0,015	10	0,0877	113	0,1041	54	0,019	8
1,00	2,1101	1142	0,1425	112	0,027	12	0,1009	132	0,1090	49	0,009	10
0,95	2,1681	580	0,1481	58	0,034	7	0,1085	76	0,1110	20	0,002	7
		587		60		8		82		17		7
0,90	2,2268	—	0,1541	r —	0,042	$r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}$ (	0,1167	—	0,1127	r —	0,005	r^2)
0,85	2,2864	596	0,1602	61	0,051	9	0,1257	90	0,1141	14	0,014	9
0,80	2,3470	606	0,1666	64	0,061	10	0,1357	100	0,1150	9	0,024	10
0,75	2,4086	616	0,1732	66	0,072	11	0,1467	110	0,1153	3	0,035	11
0,70	2,4714	628	0,1801	69	0,085	13	0,1590	123	0,1148	−5	0,048	13
0,65	2,5358	644	0,1873	72	0,099	14	0,1727	137	0,1135	13	0,063	15
0,60	2,6019	661	0,1948	75	0,114	15	0,1881	154	0,1109	26	0,081	18
0,55	2,6701	682	0,2027	79	0,131	17	0,2056	175	0,1071	38	0,101	20
0,50	2,7409	708	0,2110	83	0,151	20	0,2255	199	0,1015	56	0,124	23
0,49	2,7554	145	0,2127	17	0,155	4	0,2299	44	0,1000	15	0,129	5
0,48	2,7700	146	0,2145	18	0,160	5	0,2344	45	0,0986	14	0,134	5
0,47	2,7848	148	0,2163	18	0,164	4	0,2390	46	0,0970	16	0,140	6
0,46	2,7997	149	0,2180	17	0,169	5	0,2437	47	0,0953	17	0,145	5
0,45	2,8147	150	0,2199	19	0,173	4	0,2486	49	0,0936	17	0,151	6
0,44	2,8299	152	0,2218	19	0,178	5	0,2536	50	0,0917	19	0,157	6
0,43	2,8453	154	0,2238	20	0,183	5	0,2588	52	0,0896	21	0,163	6
0,42	2,8609	156	0,2258	20	0,188	5	0,2642	54	0,0875	21	0,169	6
0,41	2,8767	158	0,2278	20	0,192	4	0,2698	56	0,0852	23	0,176	7
0,40	2,8926	159	0,2298	20	0,198	6	0,2755	57	0,0828	24	0,183	7
0,39	2,9087	161	0,2316	18	0,204	6	0,2814	59	0,0802	26	0,190	7
0,38	2,9250	163	0,2335	19	0,210	6	0,2876	62	0,0774	28	0,197	7
0,37	2,9415	165	0,2355	20	0,216	6	0,2940	64	0,0745	29	0,204	7
0,36	2,9583	168	0,2376	21	0,222	6	0,3006	66	0,0714	31	0,212	8
0,35	2,9754	171	0,2397	21	0,228	6	0,3074	68	0,0680	34	0,220	8
0,34	2,9927	173	0,2418	21	0,235	7	0,3145	71	0,0644	36	0,229	9
0,33	3,0103	176	0,2441	23	0,241	6	0,3219	74	0,0607	37	0,238	9
0,32	3,0282	179	0,2465	22	0,248	7	0,3296	77	0,0568	39	0,247	9
		182		24		7		80		43		9
0,31	3,0464	—	0,2487	r —	0,255	$r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}$ (	0,3376	—	0,0525	r —	0,256	r^2)

Suite de la deuxième table. Talus t = 1 sur 1

$\frac{y}{A}$ ou $\frac{y_0}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$												
		diff.		diff.		diff.			diff.		diff.		diff.
0,31	3,0464	—	0,2487 r	—	0,255 r²	—	$\frac{\alpha U^2}{gH}$	(0,3376	—	0,0525 r	—	0,256 r²)	
0,30	3,0649	185	0,2511	24	0,263	8		0,3460	84	0,0479	46	0,266	10
0,29	3,0839	190	0,2536	25	0,270	7		0,3547	87	0,0431	48	0,276	10
0,28	3,1032	193	0,2560	24	0,278	8		0,3638	91	0,0379	52	0,287	11
0,27	3,1229	197	0,2585	25	0,286	8		0,3733	95	0,0323	56	0,298	11
0,26	3,1431	202	0,2611	26	0,295	9		0,3833	100	0,0265	58	0,310	12
0,25	3,1638	207	0,2658	27	0,304	9		0,3937	104	0,0202	63	0,322	12
0,24	3,1850	212	0,2666	28	0,313	9		0,4047	110	0,0134	68	0,336	14
0,23	3,2068	218	0,2694	28	0,323	10		0,4163	116	0,0061	73	0,349	13
		224		29		10			122		77		14
0,22	3,2292	—	0,2723 r	—	0,333 r²	—	$\frac{\alpha U^2}{gH}$	(0,4285	+	0,0016 r	—	0,363 r²)	
0,21	3,2524	232	0,2754	31	0,343	10		0,4414	129	0,0099	83	0,378	15
0,20	3,2763	239	0,2785	31	0,354	11		0,4551	137	0,0190	91	0,394	16
0,19	3,3010	247	0,2818	33	0,366	12		0,4696	145	0,0288	98	0,411	17
0,18	3,3266	256	0,2852	34	0,378	12		0,4850	154	0,0394	106	0,429	18
0,17	3,3533	267	0,2887	35	0,391	13		0,5014	164	0,0507	113	0,448	19
0,16	3.3812	279	0,2924	37	0,405	14		0,5190	176	0,0632	125	0,469	21
0,15	3,4104	292	0,2963	39	0,420	15		0,5380	190	0,0769	137	0,491	22
0,14	3,4411	307	0,3004	41	0,435	15		0,5585	205	0,0918	149	0,514	23
0,13	3,4736	325	0,3050	46	0,452	17		0,5807	222	0,1085	165	0,539	25
0,12	3,5081	345	0,3097	47	0,470	18		0,6049	242	0,1266	183	0,567	28
0,11	3,5450	369	0,3145	48	0,490	20		0,6315	266	0,1470	204	0,598	31
0,10	3,5847	397	0,3197	52	0,511	21		0,6610	295	0,1698	228	0,631	33
0,09	3,6278	431	0,3256	59	0,534	23		0,6938	328	0,1957	259	0,668	37
0,08	3,6752	474	0,3321	65	0,561	27		0,7509	371	0,2254	297	0,710	42
0,07	3,7280	528	0,3392	71	0,591	30		0,7734	425	0,2598	344	0,758	48
0,06	3,7877	597	0,3468	76	0,626	35		0,8230	496	0,3006	408	0,813	55
0,05	3,8573	696	0,3560	92	0,668	42		0,8823	593	0,3502	496	0,879	66
0,048	3,8727	154	0,3575	15	0,681	13		0,8956	133	0,3614	112	0,894	15
0,046	3,8887	160	0,3596	21	0,691	10		0,9095	139	0,3732	118	0,910	16
0,044	3,9053	166	0,3619	23	0,701	10		0,9241	146	0,3855	123	0,926	16
0,042	3,9227	174	0,3642	23	0,712	11		0,9394	153	0,3984	129	0,945	17
0,040	3,9408	181	0,3666	24	0,723	11		0,9555	161	0,4120	136	0,961	18
0,038	3,9598	190	0,3692	26	0,734	11		0,9724	169	0,4264	144	0,979	18
0,036	3,9798	200	0,3720	28	0,746	12		0,9903	179	0,4417	153	0,999	20
0,034	4,0008	210	0,3750	30	0,759	13		1,0093	190	0,4580	163	1,020	21
0,032	4,0230	222	0,3781	31	0,772	13		1,0294	201	0,4752	172	1,042	22
0,030	4,0463	235	0,3813	32	0,786	14		1,0509	215	0,4936	184	1,066	24
0,028	4,0716	251	0,3847	34	0,801	15		1,0739	250	0,5135	209	1,091	25
0,026	4,0984	268	0,3885	38	0,817	16		1,0987	248	0,5350	215	1,119	28
0.024	4,1273	289	0,3925	40	0,835	18		1,1255	268	0,5583	233	1,148	29
0,022	4,1585	312	0,3968	43	0,854	19		1,1547	292	0,5857	254	1,180	32
0,020	4,1927	342	0,4015	47	0,875	21		1,1868	321	0,6117	280	1,216	36
0,019	4,2110	183	0,4040	25	0,886	11		1,2040	172	0,6267	150	1,254	18
0,018	4,2303	193	0,4067	27	0,898	12		1,2225	185	0,6427	160	1,254	20
0,017	4,2506	203	0,4095	28	0,911	13		1,2416	193	0,6596	169	1,275	21
0,016	4,2721	215	0,4125	30	0,924	13		1,2620	204	0,6776	180	1,298	23
0,015	4,2949	228	0,4157	32	0,938	14		1;2838	218	0,6968	192	1,322	24
0,014	4,3193	244	0,4190	33	0,953	15		1,3072	234	0,7174	206	1,347	25
0,013	4,3455	262	0,4227	37	0,969	16		1,3323	251	0,7395	221	1,375	28
0,012	4,3737	282	0,4267	40	0,987	18		1,3595	272	0,7654	239	1,404	29
0,011	4,4043	306	0,4309	42	1,006	19		1,3891	296	0,7895	261	1,437	33
		334		47		20			324		286		35
0,010	4,4377	—	0,4356 r	—	1,026 r²	—	$\frac{\alpha U^2}{gH}$	(0,4215	+	0,8181 r	—	1,472 r²)	

***Troisième table. Talus* t = 2 *sur* 1.**

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$											
		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.
3,00	0,0000 —		0,0000 r +		0,000 r² — $\frac{\alpha U^2}{gH}$		(0,0000 —		0,0000 r +		0,000 r²)	
2,90	0,1019	1019	0,0099	99	0,015	15	0,0017	17	0,0076	76	0,011	11
2,80	0,2059	1020	0,0204	105	0,031	16	0,0034	17	0,0157	81	0,023	12
2,70	0,3061	1022	0,0315	111	0,048	17	0,0054	20	0,0242	85	0,035	12
2,60	0,4085	1024	0,0433	118	0,065	17	0,0075	21	0,0331	89	0,047	12
2,50	0,5110	1025	0,0559	126	0,084	19	0,0098	23	0,0424	93	0,060	13
2,40	0,6138	1028	0,0692	133	0,103	19	0,0123	25	0,0523	99	0,073	13
2,30	0,7169	1031	0,0833	141	0,123	20	0,0150	27	0,0628	105	0,087	14
2,20	0,8202	1033	0,0985	152	0,144	21	0,0180	30	0,0738	110	0,100	13
2,10	0,9239	1037	0,1147	162	0,166	22	0,0214	34	0,0853	115	0,114	14
2,00	1,0280	1041	0,1321	174	0,190	24	0,0250	36	0,0975	122	0,128	14
1,90	1,1325	1045	0,1507	186	0,214	24	0,0291	41	0,1103	128	0,142	14
1,80	1,2375	1050	0,1705	198	0,239	25	9,0336	45	0,1238	135	0,156	14
1,70	1,3431	1056	0,1918	213	0,265	26	0,0387	51	0,1378	140	0,170	14
1,60	1,4493	1062	0,2147	229	0,292	27	0,0444	57	0,1525	147	0,184	14
1,50	1,5563	1070	0,2396	249	0,321	29	0,0509	65	0,1679	154	0,196	12
1,40	1,6643	1080	0,2665	269	0,351	30	0,0582	73	0,1839	160	0,207	11
1,30	1,7734	1091	0,2955	290	0,381	30	0,0667	85	0,2004	165	0,217	10
1,20	1,8838	1104	0,3271	316	0,412	31	0,0764	97	0,2172	168	0,225	8
1,10	1,9959	1121	0,3614	343	0,444	32	0,0877	113	0,2342	170	0,229	4
1,00	2,1101	1142	0,3995	381	0,477	33	0,1009	132	0,2511	169	0,229	0
0,95	2,1681	580	0,4199	204	0,494	17	0,1085	76	0,2594	83	0,227	—2
0,90	2,2268	587	0,4413	214	0,510	16	0,1167	82	0,2675	81	0,224	3
0,85	2,2864	596	0,4638	225	0,527	17	0,1257	90	0,2752	77	0,218	6
0,80	2,3470	606	0,4875	237	0,543	16	0,1357	100	0,2825	73	0,210	8
0,75	2,4086	616	0,5127	252	0,559	16	0,1467	110	0,2892	67	0,199	11
0,70	2,4714	628	0,5393	266	0,575	16	0,1590	123	0,2952	60	0,186	13
0,65	2,5358	644	0,5675	282	0,591	16	0,1727	137	0,3000	48	0,169	17
0,60	2,6019	661	0,5978	303	0,606	15	0,1881	154	0,3035	35	0,147	22
0,55	2,6701	682	0,6302	324	0,621	15	0,2056	175	0,3053	18	0,120	27
0,50	2,7409	708	0,6651	349	0,634	13	0,2255	199	0,3048	—5	0,087	33
0,49	2,7554	145	0,6723	72	0,637	3	0,2299	44	0,3042	6	0,079	8
0,48	2,7700	146	0,6798	75	0,639	2	0,2344	45	0,3037	5	0,072	7
0,47	2,7848	148	0,6875	77	0,642	3	0,2390	46	0,3031	6	0,064	8
0,46	2,7997	149	0,6952	77	0,644	2	0,2437	47	0,3023	8	0,056	8
0,45	2,8147	150	0,7030	78	0,647	3	0,2486	49	0,3013	10	0,047	9
0,44	2,8299	152	0,7110	80	0,649	2	0,2536	50	0,3002	11	0,038	9
0,43	2,8453	154	0,7192	82	0,651	2	0,2588	52	0,2990	12	0,029	9
0,42	2,8609	156	0,7276	84	0,554	3	0,2642	54	0,2976	14	0,019	10
0,41	2,8767	158	0,7362	86	0,657	3	0,2698	56	0,2959	17	0,008	11
0,40	2,8926 —	159	0,7448 r +	86	0,659 r² — $\frac{\alpha U^2}{gH}$	2	0,2755 —	57	0,2940 r —	19	0,003 r²	11
0,39	2,9087	161	0,7535	87	0,660	1	0,2814	59	0,2919	21	0,014	11
0,38	2,9250	163	0,7624	89	0,662	2	0,2876	62	0,2896	23	0,026	12
0,37	2,9415	165	0,7716	92	0,664	2	0,2940	64	0,2871	25	0,038	12
0,36	2,9583	168	0,7809	93	0,666	2	0,3006	66	0,2843	28	0,051	13
0,35	2,9754	171	0,7905	96	0,667	1	0,3074	68	0,2812	31	0,064	13
0,34	2,9927	173	0,8003	98	0,669	2	0,3145	71	0,2779	33	0,078	14
0,33	3,0103	176	0,8104	101	0,671	2	0,3219	74	0,2742	37	0,093	15
0,32	3,0282	179	0,8207	103	0,672	1	0,3296	77	0,2702	40	0,108	15
0,31	3,0464	182	0,8313	106	0,674	2	0,3376	80	0,2658	44	0,124	16
0,30	3,0649 —	185	0,8422 r +	109	0,675 r² — $\frac{\alpha U^2}{gH}$	1	0,3460 —	84	0,2611 r —	47	0,141 r²	17

Suite de la troisième table. Talus t = 2 sur 1.

$\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$	$\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$	diff.		diff.		diff.		diff.		diff.		diff.
0,30	$3{,}0649 - 0{,}8422\,r + 0{,}675\,r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}(0{,}3460 - 0{,}2611\,r - 0{,}141\,r^2)$											
0,29	3,0839	190	0,8534	112	0,676	1	0,3547	87	0,2559	52	0,159	18
0,28	3,1032	193	0,8650	116	0,677	1	0,3638	91	0,2502	57	0,177	18
0,27	3,1229	197	0,8769	119	0,678	1	0,3733	95	0,2440	62	0,197	20
0,26	3,1431	202	0,8891	122	0,679	1	0,3833	100	0,2374	66	0,217	20
0,25	3,1638	207	0,9017	126	0,679	0	0,3937	104	0,2302	72	0,239	22
0,24	3,1850	212	0,9147	130	0,679	0	0,4047	110	0,2223	79	0,262	23
0,23	3,2068	218	0,9282	135	0,680	1	0,4163	116	0,2137	86	0,286	24
0,22	3,2292	224	0,9422	140	0,679	—1	0,4285	122	0,2043	94	0,311	25
0,21	3,2524	232	0,9568	146	0,679	0	0,4414	129	0,1941	102	0,338	27
0,20	3,2763	239	0,9720	152	0,679	0	0,4551	137	0,1831	110	0,366	28
0,19	3,3010	247	0,9878	158	0,678	1	0,4696	145	0,1710	121	0,397	31
0,18	3,3266	256	1,0043	165	0,677	1	0,4850	154	0,1577	133	0,429	32
0,17	3,3533	267	1,0217	174	0,676	1	0,5014	164	0,1431	146	0,464	35
0,16	3,3812	279	1,0399	182	0,674	2	0,5190	176	0,1270	161	0,501	37
0,15	3,4104	292	1,0592	193	0,672	2	0,5380	190	0,1093	177	0,541	40
0,14	3,4411	307	1,0798	206	0,670	2	0,5585	205	0,0899	194	0,584	43
0,13	3,4736	325	1,1017	219	0,668	2	0,5807	222	0,0683	216	0,631	47
0,12	3,5081	345	1,1250	233	0,663	5	0,6049	242	0,0440	243	0,681	50
0,11	3,5450	369	1,1499	249	0,659	4	0,6315	266	0,0166	274	0,737	56
0,10	$3{,}5847 - 1{,}1771\,r + 0{,}654\,r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}(0{,}6610 + 0{,}0142\,r - 0{,}799\,r^2)$	397		272		5		295		308		62
0,09	3,6278	431	1,2071	300	0,648	6	0,6938	328	0,0494	352	0,867	68
0,08	3,6752	474	1,2402	331	0,641	7	0,7309	371	0,0899	405	0,945	78
0,07	3,7280	528	1,2775	373	0,633	8	0,7734	425	0,1372	473	1,033	88
0,06	3,7877	597	1,3193	418	0,620	13	0,8230	496	0,1937	565	1,136	103
0,05	3,8573	696	1,3688	495	0,607	13	0,8823	593	0,2626	689	1,259	123
0,048	3,8727	154	1,3798	110	0,604	3	0,8956	133	0,2783	157	1,286	27
0,046	3,8887	160	1,3913	115	0,601	3	0,9095	139	0,2947	164	1,315	29
0,044	3,9053	166	1,4033	120	0,598	3	0,9241	146	0,3119	172	1,345	30
0,042	3,9227	174	1,4159	126	0,594	4	0,9394	153	0,3301	182	1,377	32
0,040	3,9408	181	1,4289	130	0,590	4	0,9555	161	0,3493	192	1,410	33
0,038	3,9598	190	1,4427	138	0,586	4	0,9724	169	0,3696	203	1,445	35
0,036	3,9798	200	1,4572	145	0,582	4	0,9903	179	0,3910	214	1,481	36
0,034	4,0008	210	1,4725	153	0,578	4	1,0093	190	0,4138	228	1,520	39
0,032	4,0230	222	1,4887	162	0,573	5	1,0294	201	0,4381	243	1,562	42
0,030	4,0465	235	1,5058	171	0,568	5	1,0509	215	0,4642	261	1,606	44
0,028	4,0716	251	1,5240	182	0,562	6	1,0739	230	0,4924	282	1,653	47
0,026	4,0984	268	1,5436	196	0,556	6	1,0987	248	0,5227	303	1,704	51
0,024	4,1273	289	1,5648	212	0,549	7	1,1255	268	0,5556	329	1,759	55
0,022	4,1585	312	1,5877	229	0,542	7	1,1547	292	0,5915	359	1,818	59
0,020	4,1927	342	1,6128	251	0,534	8	1,1868	321	0,6312	397	1,884	66
0,019	4,2110	183	1,6263	135	0,530	4	1,2040	172	0,6525	213	1,919	35
0,018	4,2303	193	1,6405	142	0,525	5	1,2223	183	0,6752	227	1,956	37
0,017	4,2506	203	1,6554	149	0,520	5	1,2416	193	0,6993	241	1,996	40
0,016	4,2721	215	1,6712	158	0,515	5	1,2620	204	0,7248	255	2,038	42
0,015	4,2949	228	1,6881	169	0,510	5	1,2838	218	0,7520	272	2,082	44
0,014	4,3193	244	1,7060	179	0,503	7	1,3072	234	0,7812	292	2,129	47
0,013	4,3455	262	1,7254	194	0,497	6	1,3323	251	0,8127	315	2,180	51
0,012	4,3737	282	1,7463	209	0,490	7	1,3595	272	0,8468	341	2,236	56
0,011	4,4043	306	1,7690	227	0,483	7	1,3891	296	0,8839	371	2,296	60
0,010	$4{,}4377 - 1{,}7937\,r + 0{,}474\,r^2 - \frac{\alpha U^2}{gH}(1{,}4215 + 0{,}9247\,r - 2{,}362\,r^2)$	334		247		9		324		408		66

40. *Usage des tables de remous.*

Connaissant la grandeur y_0 du relèvement de l'eau à un endroit déterminé d'un courant, par exemple immédiatement en amont d'un barrage, la pente i du fond et la profondeur d'eau primitive H au-dessus, si l'on veut savoir à quelle distance $s - s_0$, ce relèvement aura une autre grandeur y, on n'a qu'à chercher dans la colonne $\frac{y}{H}$ ou $\frac{y_0}{H}$ de celles des tables soit de l'article 37, soit de l'article 39 qui convient au talus des bords (*), les deux rapports $\frac{y_0}{H}$, $\frac{y}{H}$ répondant à ces deux grandeurs données du relèvement : la différence des deux nombres correspondants de la colonne $\frac{is}{H}$ ou $\frac{is_0}{H}$ donnera $\frac{i(s-s_0)}{H}$, ou la distance cherchée $s - s_0$ divisée par la profondeur primitive H et multipliée par la pente de fond i.

Réciproquement, si l'on veut savoir quel relèvement y on aura à une distance donnée $s - s_0$ du point où le relèvement a la grandeur donnée y, on ajoutera $\frac{i(s-s_0)}{H}$ à la valeur $\frac{is_0}{H}$ répondant dans

(*) Si les talus n'étaient ni abrupts ($t = 0$) ni à 1 ni à 2 sur 1 ($t = 1$, $t = 2$), on pourrait facilement interpoler entre les trois tables de l'art. 39, soit par différences proportionnelles, soit paraboliquement, au moyen d'une formule semblable à celle (47) de l'art. 39. Cette formule pourrait servir à obtenir deux et même six autres tables applicables à des talus t croissant par 1/2 et même par 1/4. Nous ne nous y arrêterons pas. Nous supposons que l'on *assimilera* approximativement le courant à un autre dont les talus aient les valeurs $t = 0$, 1 ou 2 (voir art. 44).

la table à $\frac{y_0}{H}$, ce qui donnera $\frac{is}{H}$. On cherchera celui-ci à la table, et le $\frac{y}{H}$ correspondant donnera, en le multipliant par H, le relèvement cherché y.

Voici quelques exemples de calcul.

Premier exemple. Un barrage élève l'eau de 2m,40 dans une rivière dont le lit est assimilable à un canal trapèze avec talus de 1 sur 1, où la profondeur d'eau, avant le relèvement, était 1m,20, la largeur moyenne 7m,20, et la pente 0,00075.

On demande à quelle distance en amont du barrage le relèvement sera réduit à 0m,06 ?

On a

$$t = 1, \quad r = \frac{1,20}{7,20} = \frac{1}{6}, \quad i = 0,00075.$$

Si la vitesse U n'a pas été mesurée, on peut la déduire du rayon moyen

$$\frac{7,20 \times 1,20}{6,00 + 2 \times 1,20\sqrt{2}} = 0^m,9197,$$

dont le produit 0,000689775 par la pente i répond, dans la table usuelle de l'article 14 ci-dessus, à U = 1m,3286, ce qui donne, en supposant égal à 1,1 le coefficient α, $\frac{\alpha U^2}{gH} = 0,1648$.

On a, en conséquence (5e table $t = 1$, $r = 1/6$ de l'art. 37) :

$$\text{Pour } \frac{y_0}{H} = \frac{2,40}{1,20} = 2,00,$$

$$\frac{is_0}{H} = 1,0194 - \frac{\alpha U^2}{gH} \cdot 0,0177 = \ldots \quad 1,0165$$

Pour $\frac{y}{H} = \frac{0,06}{1,20} = 0,05,$

$$\frac{is}{H} = 3,7794 - \frac{\alpha U^2}{gH} \cdot 0,9162 = \ldots \quad 3,6284$$

$$\text{D'où} \quad \frac{i}{H}(s - s_0) = \ldots \quad 2,6119$$

La distance cherchée, obtenue en multipliant par $H = 1,20$ et divisant par $i = 0,00075$ est

$$S - S_0 = 2,6119 \times 1600 = 4179 \text{ mètres.}$$

Deuxième exemple. Même problème et mêmes données, excepté que la largeur moyenne primitive de l'eau est 12 mètres.

Alors $r = \frac{1}{10}$. Il convient de se servir des tables avec r quelconque de l'art. 39.

La dernière, relative à $t = 1$, fournit facilement pour cette valeur de r et en ayant égard à ce qu'un calcul de U par le rayon moyen donne $\frac{\alpha U^2}{gH} = 0,183$:

Pour $\frac{y_0}{H} = 2$, $\frac{is_0}{H} = 1,0227 - \frac{\alpha U^2}{gH} \cdot 0,0296 = 1,0173$

$\frac{y}{H} = 0,05$, $\frac{is}{H} = 3,8150 - \frac{\alpha U^2}{gH} \cdot 0,9085 = 3,6487$

Différence. 2,6314

D'où la distance

$$s - s_0 = \frac{H}{i} \cdot 2,6314 = 4210 \text{ mètres.}$$

Troisième exemple. Mêmes données qu'au premier exemple. On demande quel relèvement

d'eau ou remous aura lieu à une distance de 2000 mètres en amont du barrage?

En multipliant par $\frac{H}{i} = 1600$ la valeur $\frac{is_0}{H} = 1,0165$ relative à $\frac{y_0}{H} = 2,00$ trouvée précédemment, on a pour l'abscisse du barrage

$$s_0 = 1626.$$

c'est à-dire que l'origine des s et s_0 est à 1626 mètres en aval.

A la distance $s - s_0 = 2000$ en amont de ce barrage on aura

$$s = 2000 + 1626 = 3626,$$

d'où

$$\frac{is}{H} = \frac{3626}{1600} = 2,2662.$$

En cherchant dans la cinquième table de l'article 37, pour laquelle $t = 1$, $r = \frac{1}{6}$, cette valeur de $\frac{is}{H}$, on trouve que, si l'on négligeait le terme affecté de $\frac{\alpha U^2}{gH}$, elle répondrait à $\frac{y}{H} = 0,8433$. En tenant compte de ce terme et de la valeur $\frac{\alpha U^2}{gH} = 0,1648$, on a pour les deux valeurs de $\frac{y}{H}$ les plus proches,

$$\left.\begin{array}{l} 0,85;\ \ldots\ 2,2583 - 0,0017 = 2,2566 \\ 0,80;\ \ldots\ 2,3175 - 0,0019 = 2,3175 \end{array}\right\} \text{Différence } 0,0590.$$

D'où il suit que, pour $\frac{is}{H} = 2,2662$, on a

$$\frac{y}{H} = 0,8419.$$

Multipliant par $H = 1,20$, on a pour le relèvement cherché

$$y = 1^m 010.$$

Le relèvement *hydrostatique*, ou dû à une surface d'eau horizontale au niveau de l'eau immédiatement en amont du barrage, n'eût été que $2,40 - 2000 \times 0,00075 = 0^m,90$. La différence entre ces deux relèvements est bien plus forte à de plus grandes distances du barrage.

41. *Cas de valeur de $\frac{y}{H}$ très-grandes ou très-petites.*

Pour bien connaître la forme du remous il convient d'examiner ce que devient $\frac{i(s - s_0)}{H}$ pour les très-grandes et les très-petites valeurs de $\frac{y}{H}$. Alors son expression (46) de l'art. 35 prend des formes plus simples, sous lesquelles on peut l'employer pour étendre facilement les tables au delà de $\frac{y}{H} = 0,01$ ou en deçà de $\frac{y}{H} = 3$.

1° Pour les très-petites valeurs de $\frac{y}{H}$, si l'on fait

$$(m+1)(1+rt) - r' = K,$$

$$(m+1)\left[\frac{m+2}{2}(1+r^2t^2) + (m+1)rt - r'(1+rt)\right] = K',$$

on a, en développant le dénominateur de (46) suivant les puissances de $\frac{y}{H}$ et en désignant par K''... d'autres coefficients :

$$1 - \left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+r'\frac{y}{H}\right) =$$
$$= K\frac{y}{H} - K'\frac{y^2}{H^2} + K''\frac{y^3}{H^3} + \ldots\ldots$$

Si l'on divise l'unité par cette expression pour avoir la première quantité sous le signe $\int$, et si, pour avoir la seconde, on multiplie le quotient par

$$\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+rt+2rt\frac{y}{H}\right) =$$
$$= (1+rt)\left[1-\left(3+3rt-\frac{2rt}{1+rt}\right)\frac{y}{H}+\ldots\ldots\right]$$

on a, en intégrant et ne conservant point ce qui sera affecté du carré et des puissances supérieures de $\frac{y}{H}$, $\frac{y_0}{H}$:

$$(48)\quad \frac{i(s-s_0)}{H} = \frac{1-(1+rt)\frac{\alpha U^2}{gH}}{K}\ \text{log. hyp.}\ \frac{y_0}{y} +$$
$$+\left[\frac{K'}{K^2}+\frac{3(1+rt)^2-2rt}{K}\cdot\frac{\alpha U^2}{gH}\right]\frac{y_0-y}{H}$$

Le second membre devient infini pour $y=0$, lorsque

$$(1+rt)\frac{\alpha U^2}{gH} < 1,$$

ce qui est le cas des courants ordinaires. *La courbe d'eau relevée a donc pour asymptote la*

ligne de pente de l'eau non relevée dans ces courants non torrentueux.

Il en est autrement si $(1+rt)\frac{\alpha U^2}{gH}=1$. Le premier terme du second membre disparaît. La partie de la courbe d'eau relevée dont nous nous occupons, où les $\frac{y}{H}$, $\frac{y_0}{H}$ sont très-petits, devient une ligne droite rencontrant la ligne de pente primitive de l'eau à une distance finie qui est la valeur de s donnée par l'équation précédente en effaçant le premier terme du second membre et faisant $y=0$ dans le second.

Les tables ne doivent être appliquées que dans la limite $\frac{\alpha U^2}{gH}<\frac{1}{1+rt}$, comme nous l'avons déjà dit, art. 38. Il convient même de se tenir en deçà, vu que les irrégularités du fond et des bords font manifester les phénomènes torrentueux avant de l'avoir atteinte.

2° Pour les valeurs de $\frac{y}{H}$ très-grandes par rapport à 1, $\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}$ est très-petit devant 1, et comme $\left(1+rt\frac{y}{H}\right)^{-m-1}$ est au plus égal à 1, et $1+r'\frac{y}{H}$ moindre que $1+\frac{y}{H}$, le produit de ces trois facteurs est moindre que $\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m}$. On peut donc diviser le numérateur par le dénominateur des expressions qui multiplient

$d\cdot\left(\frac{y}{H}\right)$ sous les signes $\int$ de l'équation (46) de l'article 35 en négligeant le carré et les puissances supérieures du second terme du dénominateur, qui n'est autre chose que ce produit. Elle prend, si $rt=0$, c'est-à-dire si le canal est ou rectangulaire ($t=0$) ou très-large par rapport à sa profondeur ($r=0$), la forme suivante :

$$\frac{i(s-s_0)}{H}=\int_{\frac{y}{H}}^{\frac{y_0}{H}}\left[1+\left(1+r'\frac{y}{H}\right)\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\right]d\frac{y}{H}-$$

$$-\frac{\alpha U^2}{gH}\int_{\frac{y}{H}}^{\frac{y_0}{H}}\left[\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-3}+\left(1+r'\frac{y}{H}\right)^{-3}\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-4}\right]d\frac{y}{H},$$

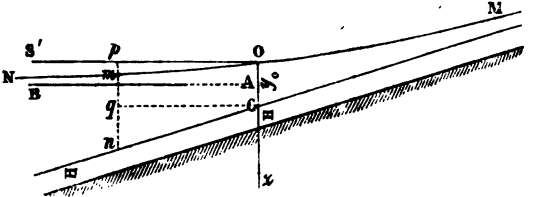
où les intégrations s'effectuent facilement par parties, ce qui donne, en transposant la portion du premier terme fournie par $\int d\frac{y}{H}$ et en multipliant par H :

$$(49)\qquad y_0-y-i(s-s_0)=\left\{\frac{H+r'\dfrac{H+my_0}{m-1}}{m\left(1+\dfrac{y_0}{H}\right)^m}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha U^2}{gH}\left[\frac{H}{2\left(1+\dfrac{y_0}{H}\right)^2}+\frac{H+r'\dfrac{H+(m+3)y_0}{m+2}}{(m+3)\left(1+\dfrac{y_0}{H}\right)^{m+2}}\right]\right\}-$$

$-$ { La même chose en y au lieu de y_0 }.

Pour tirer, de cette équation en s et y, une équation de la courbe MN de l'eau relevée, rapportée à des coordonnées rectangulaires, prenons pour origine le point O de cette courbe pour le-



quel $y = OC = y_0$, $s = s_0$; prenons pour abscisse l'horizontale $Op = s'$ comptée dans le sens du courant, et pour ordonnée la verticale $pm = z$ comptée dans le sens de la pesanteur. Comme $pm + mn = pq + qn$, n et q étant les points de rencontre de cette ordonnée prolongé avec la surface primitive de l'eau nC et avec horizontale Cq menée par le point C, on a:

$$z + y = y_0 + is, \quad s - s_0 = -s',$$

d'où

$$y_0 - y - i(s - s_0) = z, \quad y = y_0 + is' - z.$$

Substituant, on obtient pour l'équation de la courbe d'eau entre les coordonnées s' et z.

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \text{La première partie du} \\ \text{second membre de} \\ \text{l'équation (49),} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{La même chose en met-} \\ \text{tant } y_0 + is' - z \text{ au} \\ \text{lieu de } y_0. \end{array} \right\}$$

Or, en faisant $is = \infty$, cette deuxième partie du second membre s'évanouit, et il reste:

$$z = \{\text{La première partie entre accolades}\}.$$

La courbe de l'eau relevée a donc une asymptote horizontale AB (*) qui passe au-dessous de l'origine O, ou du point pour lequel le relèvement est y_0 (supposé déjà grand par rapport à H) à une

(*) On pouvait déjà reconnaître l'existence d'une pareille asymptote d'après l'équation (44) de l'art. 34, qui donne $\frac{dh}{ids} = 1$ pour ω infini.

distance verticale OA égale à la première partie ou accolade du second membre de l'équation (49).

Si, par exemple, on prend pour l'origine O le point jusqu'où s'étendent le plus nos tables vers l'aval, c'est-à-dire si $\frac{y_0}{H}=3$, on trouve pour l'équation de l'asymptote, en remettant pour m sa valeur $\frac{21}{11}$:

$$z=H\left[0,03714+0,27480r'-\frac{\alpha U^2}{gH}(0,03148+0,00058r')\right]$$

Sa position est, comme l'on voit, indépendante de la pente i, si ce n'est en tant que U et H peuvent en dépendre.

Lorque $\frac{\alpha U^2}{gH}$ est négligeable devant 1, et que le canal est assez large pour que $r'=\frac{2r}{1+2r}$ soit négligeable aussi, on a, comme l'on voit, $z=0,0371H$ en sorte que l'asymptote horizontale passe au $\frac{1}{27}$ environ de la profondeur primitive H, au-dessous du niveau de la surface de l'eau à l'endroit où elle est relevée du triple de cette profondeur; niveau que l'on trouve toujours au moyen de la première table de l'article 37, si le point connu de la surface relevée répond à un relèvement différent, inférieur à 3H.

Si r' n'est pas nul, ou si la section d'eau primitive, supposée alors rectangulaire, a une certaine profondeur par rapport à la largeur, on voit que la distance verticale z de l'asymptote horizontale

varie par équidifférences avec le rapport r'. On a respectivement pour

$r=\frac{1}{6}$ et $r=\frac{1}{3}$, ou pour $r'=\frac{1}{4}$ et $r'=\frac{2}{5}$, $\frac{\alpha U^2}{gH}$ étant toujours négligeable.

$$z=H\left(0,1058-0,0316\,\frac{\alpha U^2}{gH}\right)$$

et
$$z=H\left(0,1471-0,0317\,\frac{\alpha U^2}{gH}\right).$$

L'asymptote passe environ à $\frac{1}{10}$ et à $\frac{1}{7}$ de la profondeur H, au-dessous du niveau du point pour lequel $y=3H$.

42. *Solutions graphiques approchées.*

La loi du remous ou la forme de sa courbe étant ainsi connue, on peut en tirer une solution graphique très-expéditive du problème de relèvement des eaux, suffisamment approchée pour un grand nombre de cas de la pratique.

On atteindrait ce but d'une manière très-simple en traçant des lignes courbes ayant pour abscisses les grandeurs de $\frac{is}{H}$, et, pour ordonnées rectangulaires, les grandeurs correspondantes de $\frac{y}{H}$ données par les diverses colonnes des tables de l'art. 37. Mais les solutions seront plus ostensibles en traçant des types de la courbe même qu'affectent les eaux relevées.

C'est ce qu'on a fait à la *fig.* 7. Elle offre, dans

diverses hypothèses sur t, sur r, sur $\frac{\alpha U^2}{gH}$, le profil longitudinal de ces eaux pour

$$H = 0^m,10, \quad i = 1,$$

c'est-à-dire *pour une profondeur de régime uniforme d'un décimètre et pour une pente de fond égale à l'unité*. Leur asymptote supérieure commune est ainsi une ligne inclinée à 1 sur 1 ou à 45 degrés, tracée à $0^m,10$ au-dessus du fond, et représentant le profil longitudinal de la surface d'eau primitive.

Chacune de ces courbes est, par cela seul (et sans qu'il soit aucunement nécessaire de supposer que les formules restent applicables jusqu'à $i=1$) le profil en longueur de l'eau *pour une profondeur primitive quelconque* H *et une pente de fond* i *aussi quelconque en regardant les ordonnées d'eau verticales comme rapportées à une échelle de* $0^m,10$ *pour chaque hauteur égale à* H, *et les distances horizontales à une échelle de* $0^m,10$ *pour chaque distance égale à* $\frac{1}{i}$H; en sorte que si, par exemple, on a $H=1$ mètre, $i=\frac{1}{1000}$, la *fig.* 7 représente chaque courbe à une échelle de hauteurs de 1 sur 10 et à une échelle de longueurs horizontales de 1 sur 10000.

Les sept courbes pleines sont relatives à $\frac{\alpha U^2}{gH}=0$.

Celle dont le trait est le plus gros est relative à $r=0$.

Celles relatives à $r=1/6$ et $1/3$ sont au-dessus

pour les canaux rectangulaires et tombent au-dessous, comme l'on voit, pour les canaux à talus de 1 et de 2 sur 1.

Les sept courbes ponctuées que l'on voit un peu au dessous de chaque courbe pleine sont relatives à $\frac{\alpha U^2}{gH} = 0,10$.

Les abscisses horizontales de ces quatorze courbes sont les valeurs de $\frac{is}{H}$ tirées des tables. Leurs ordonnées verticales sont les $\frac{y}{H}$ portés au-dessus de la ligne d'eau primitive inclinée à 45 degrés, ou les $\frac{y}{H} + \frac{is}{H} - 3$ au-dessus de la ligne horizontale tirée du point pour lequel $\frac{y}{H} = 3$. Les lignes à 45 degrés tracées de centimètre en centimètre facilitent beaucoup la détermination des points.

43. *Exemples de ces solutions approchées.*

Si un problème quelconque est proposé sur la suite des hauteurs du relèvement d'un cours d'eau, il se trouvera résolu en déterminant simplement quelle est la courbe représentant l'eau relevée, et à quel endroit de cette courbe se trouve le barrage ou l'autre point particulier pour lequel le relèvement d'eau est donné.

Par exemple, s'il est question d'un canal rectangulaire de $7^m,20$ de largeur et de 0,00048 de pente de fond i, où la profondeur d'eau primitive $H = 1^m,20$ se trouve portée à $H + y = 3$ mètres

en un point où l'on a fait un barrage, comme il résulte de ces données, $r = \frac{1}{6}$, et (n° 36) $\frac{\alpha U^2}{gH}$ très-peu différent de $\frac{1}{10}$, le *remous est représenté par la deuxième courbe ponctuée vers le haut de la* fig. 7. Le point de cette courbe où se trouve le barrage est celui pour lequel $\frac{y}{H} = \frac{3-1,20}{1,20} = 1,50$, et est par conséquent le point où cette courbe est coupée par la ligne à 45 degrés relative à $\frac{y}{H} = 1,50$. Tous les autres points de la même courbe ponctuée donneront, par leurs distances verticales et horizontales au point ainsi déterminé (ces distances étant aux échelles respectives de $0^m,10$ pour $1^m,20$ et de $0^m,10$ pour $2500 = \frac{1,20}{0,00048}$) les niveaux et les situations de tous les points de la surface d'eau relevée.

Si $\frac{\alpha U^2}{gH}$ au lieu d'être $=0,1$, a pour valeur 0,075, on prendra, au lieu de la courbe ponctuée dont nous venons de faire usage, une courbe que l'on peut, si l'on veut, tracer au crayon dans l'intervalle de celle-ci et de la courbe pleine correspondante en partageant les distances des points de ces deux courbes de manière qu'il y en ait à peu près 1/4 du côté de la courbe ponctuée et 3/4 du côté de la courbe pleine.

Si $\frac{\alpha U^2}{gH} = 1,25$, le 1/4 sera pris au delà de la

courbe ponctuée, ou en sus de l'intervalle, et ainsi de même pour toute autre valeur de $\frac{\alpha U^2}{gH}$, qui dépassera rarement 0,2 dans les applications. Il faut faire attention que ces distances entre les courbes devront être prises, non pas dans un sens normal, mais dans le sens des lignes tracées à 45 degrés, car d'après les tables, comme d'après l'équation (46) du n° 35, ce n'est que pour des grandeurs égales de $\frac{y}{H}$ que les $\frac{is}{H}$ varient proportionnellement aux $\frac{\alpha U^2}{gH}$.

Si le rapport r de la profondeur à la largeur d'eau primitive a une grandeur qui ne soit ni zéro (ou très-petite), ni 1/6 ni 1/3, on pourra encore tracer une courbe au crayon dont on arbitrera très-approximativement la situation, sans calcul d'interpolation, d'après l'aspect de celles des trois courbes $r=0$, $r=1/6$, $r=1/3$ ayant mêmes valeurs de t. Un tracé analogue serait aussi possible si le talus t n'était ni 0, ni 1, ni 2.

Mais comme on n'a besoin de toutes ces courbes nouvelles que pour quelques points, deux seulement à l'ordinaire, savoir celui où l'on connaît et celui où l'on cherche à connaître la hauteur du relèvement, il ne sera pas nécessaire de les tracer. Celles qui existent sur la figure guideront suffisamment pour déterminer à vue d'œil la position des points, et la solution graphique sera ainsi très-expéditive.

44. *Lits irréguliers. Propriété des talus à 1/2 sur 1.*

S'il s'agit d'un lit de rivière irrégulier ou n'offrant pas une pente de fond, une largeur au plafond et des talus constants, et si l'on n'a besoin que d'un à peu près, les tables et les tracés ci-dessus dispenseront toujours de recourir aux longs calculs (art. 28) de la méthode d'intégration de proche en proche (qui ne donne elle-même que des à-peu-près) en partageant ce lit de rivière en plusieurs parties dont chacune puisse être assimilée, par aperçu, à un canal régulier à section rectangle ou trapèze. On pourra même, comme dit M. Dupuit (*), en faisant deux assimilations pour chaque portion, obtenir des limites entre lesquelles le résultat cherché sera certainement compris.

S'il y a, comme il arrive souvent, des parties où le talus est abrupt d'un côté et adouci de l'autre, on pourra approximativement supposer des deux côtés un talus moyen.

On abrégera les recherches si l'on peut assimiler les portions de rivière *à des canaux dont les talus soient de* 1 *de base pour* 2 *de hauteur*, car il résulte de la comparaison des courbes des remous (*fig*, 7) relatives à $t=0$, à $t=1$ et à $t=2$, ou des interpolations paraboliques que l'on peut faire entre les chiffres relatifs à ces trois grandeurs du talus, que si l'on a $t=1/2$, l'influence de la grandeur de r sera à peu près nulle, d'où il suit qu'une seule courbe, celle relative à $r=0$ et qui est la même, quel que soit le talus, servira pour

(*) Études, etc., appendice, p. 252.

toutes les valeurs de r, et l'on n'aura pas besoin de s'occuper de ce rapport de la profondeur à la largeur moyenne primitive de l'eau.

45. *Comparaison aux expériences.*

Il est évident que nos tables et nos courbes donneront, pour des canaux prismatiques rectangles ou trapèzes, les mêmes remous que les méthodes de calcul de proche en proche de MM. Belanger et Vauthier qui ne consistent aussi qu'en une intégration numérique de l'équation différentielle (43) du mouvement permanent des eaux, établie en supposant (art. 34) que le frottement des parois dépend toujours de la même manière de la vitesse moyenne, que celle-ci soit constante ou qu'elle soit graduellement et lentement variable.

M. d'Aubuisson a élevé des doutes sur la légitimité de cette hypothèse, en citant un nivellement du Weser en amont du double barrage à pertuis de Hameln, comme donnant des hauteurs de remous plus considérables que celles qui résulteraient de l'équation (43) du mouvement permanent (*).

Mais il est facile de voir qu'on ne peut en rien inférer. Il est bien vrai qu'en appliquant nos tables de remous dans la supposition, faite par M. d'Au-

(*) Observations faites en Allemagne sur le remous. Cet extrait de l'*hydrotechnie* de Funk (Versuch einer Darstellung der Lehren der Hydrotechnik, 1820) qui reproduit des résultats d'expériences publiées dès 1809 (Beiträge zur allgemeinen Wasser-Baukunst, von Funk) a été inséré aux Annales des ponts et chaussées, 1er semestre 1837, p. 78. M. d'Aubuisson en fait également mention dans son Traité d'hydraulique, 2e éd., p. 192.

buisson, que le courant a une section rectangulaire constante de 108 mètres de largeur et un fond en pente de 0,0004525, avec la profondeur de régime uniforme $0^m,752$ calculée d'après cette pente et le débit de $75^{mc},09$ par seconde, on trouve des rehaussements qui, à des distances du barrage de

617^m; 1334; 2398; 3242; 3837; 4660; 5621; 6084;

sont moins forts de

1^c; 4; 6; 12; 11; 17; 7; $2^{cent.}$

que ceux du nivellement opéré.

Mais il n'y a pas de raison suffisante de prendre ainsi un fond fictif parallèle à la ligne de pente des eaux supposée uniforme depuis le point à 6084 mètres en amont du barrage jusqu'à un autre point pris en aval. Si en effet l'on jette les yeux sur le profil du fond rapporté à la *fig.* 1 de la *Pl. CXXV* du recueil où a paru le mémoire de M. d'Aubuisson, il semble plutôt que, pour remplacer approximativement sa pente fort irrégulière par une pente uniforme, il convient d'adopter une ligne aboutissant au fond pris au point n° 11, à 617 mètres en amont du barrage, en partant du fond pris soit au n° 4 à 6084 mètres, soit au n° 5 à 5621 mètres, ce qui donne respectivement des pentes i de 0,0003402 et de 0,0003637, et des hauteurs de régime uniforme (calculées) de $0^m,838$ et $0^m,819$. Nos tables donnent alors, en partant du point à 617 mètres et non du barrage lui-même, vu qu'entre ces deux points il y a une dépression du fond considérable :

A des distances du barrage de

617m; 1334; 2398; 3242; 3837; 4660; 5621; 6084;

des rehaussements moins forts de

0c; 2; 2; 6; 6; 10; 5; 1cent.;

ou de

0c; 0; 0; 4; 3; 7; 2 $\frac{1}{2}$ centimètres

que ceux résultant du nivellement.

Ainsi réduites, ces différences ne suffisent plus pour faire rejeter une méthode, surtout si l'on considère, dans le cas particulier où l'on se trouve:

1° Qu'il y avait probablement une erreur de nivellement au point 4660 (n° 6) où les différences sont les plus fortes, ou bien qu'il se trouvait en cet endroit quelque forte saillie du fond non indiquée: car ce point donne à la courbe d'eau une convexité qui ne peut guère exister sans cela;

2° Que la largeur du courant n'était pas uniformément de 108 mètres, comme le supposent les calculs ci-dessus, car elle variait de 71 à 132 mètres, c'est-à-dire dans une proportion où la substitution d'une moyenne ne saurait donner un résultat sur lequel on puisse compter.

On ne peut rien tirer non plus pour la question qui nous occupe, ni des trois profils de la Werra, rapportés à la même planche du mémoire de M. d'Aubuisson, ni des nivellements de la rivière d'Yonne en amont du barrage d'Epineau qui ont été donnés aussi aux Annales des ponts et chaussées (*).

(*) 1839, 1er semestre, p. 272 à 280. On n'y trouve en effet ni les cotes de fond, ni les largeurs, ni les débits, et

46. *Facilité de modifier au besoin les résultats en se servant des mêmes courbes.*

Mais je suppose qu'il soit reconnu que l'équation du mouvement permanent de l'art. 34 donne toujours des remous au-dessous de la réalité, ou que, dans la crainte qu'il n'en soit ainsi, les ingénieurs veuillent prendre constamment des nombres un peu supérieurs : *nos tables ou nos courbes pourront toujours servir.*

En effet, l'infériorité des relèvements donnés par l'équation (43) du mouvement permanent ne peut être imputée au choix fait, chapitre 2 ci-dessus, des grandeurs numériques du coefficient c et de l'exposant m de la formule cU^m du frottement des parois, car *le coefficient* c *n'entre pas dans les transformées* (44) et (40) de cette équation, et quant à l'exposant m, il est facile de s'assurer qu'en remplaçant la valeur adoptée $\frac{21}{11}$ par celle $\frac{15}{8} = 1{,}875$ qui est, comme nous avons vu, à peu près la plus petite valeur qu'on puisse lui donner d'après les expériences, on n'aurait que des relèvements excessivement peu supérieurs à ceux que nous a donnés $m = \frac{21}{11}$.

On ne peut guère attribuer cet excès (s'il existe) des relèvements réels sur les relèvements

---

il est impossible d'y suppléer par des documents puisés à la page 75 et à la planche d'un autre beau mémoire du même ingénieur, M. Chanoine, publié aux Annales au commencement de 1841.

ainsi calculés qu'à ce que les vitesses se distribueraient, aux divers points de chaque section transversale, d'une autre manière que dans le mouvement uniforme, en sorte que dans le courant à vitesse décroissante produit par le barrage, il y ait moins de différence entre la vitesse moyenne et les vitesses aux parois qui déterminent les frottements, que dans le courant primitif pour même vitesse moyenne.

S'il en était ainsi, le frottement dans l'état nouveau pourrait être représenté approximativement, u étant la vitesse moyenne dans une section où l'eau est relevée de y, par une expression

$$\left(1+6\frac{y}{H}\right)cu^m;$$

6 étant un coefficient numérique qui, s'il avait une valeur égale à 0,1, par exemple, donnerait $1,1cu^m$ pour $y=H$, et $1,3cu^m$ pour $y=3H$, en sorte que le frottement croîtrait non-seulement avec la vitesse, mais aussi avec le relèvement et serait sensiblement cu^m dans les parties où, le relèvement y étant peu considérable, le courant est presque à l'état d'uniformité.

Qu'en résulterait-il? que le second terme des dénominateurs des expressions sous le signe $\int$ de l'équation (46) se trouverait simplement multiplié par un nouveau facteur $1+0,1\frac{y}{H}$, en sorte que dans le cas d'un canal très-large ($r=0$, $r'=0$) ce terme, au lieu d'être

$$\left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}, \quad \text{serait} \quad \left(1+\frac{y}{H}\right)^{-m-1}\left(1+0,1\frac{y}{H}\right),$$

ou précisément le même que pour un canal rectangulaire dans lequel on aurait r' ou $\frac{2r}{1+2r}=0,1$, d'où $r=\frac{1}{18}$, *ce qui produirait, au lieu de la courbe de remous relative au cas du canal très-large* r = 0, *une courbe un peu plus haute, tracée au tiers de l'intervalle qui sépare celle-ci de la courbe relative à* t = 0, r = 1/6 *sur la* fig. 7.

On peut approximativement étendre cette conclusion aux autres canaux rectangulaires ou trapèzes pour lesquels nous avons calculé des tables et tracé des courbes. Il suffirait donc, pour tenir compte à peu près de ce que le frottement serait, ainsi, supposé augmenté dans le rapport de 1 à $1+0,1\frac{y}{H}$ par l'effet de la non-uniformité du mouvement, *de rehausser toutes ces courbes du tiers de l'intervalle que l'on voit entre celle* t = 0, r = 1/6, *et celle* r = 0.

Moyennant cette sorte de transport, on voit que les courbes tracées pourraient toujours servir à peu près, comme nous venons de dire, si la nécessité d'une altération des résultats du calcul basé sur l'équation du mouvement permanent venait à être mieux démontrée qu'elle ne me paraît l'être par le nivellement du Weser.

47. *Observations à recueillir. Courbes expérimentales à construire. Conclusion.*

Il est désirable que les ingénieurs qui seront à même d'observer des remous de barrages et de

mesurer leur hauteur en divers points par un nivellement exact recueillent tous les documents nécessaires pour avoir les valeurs de H et de i, ainsi que celles de r, de t et de $\frac{U^2}{gH}$ relatives à chaque cas, afin, en en rapportant des profils comme ceux de la *fig.* 7 aux mêmes échelles de $\frac{0,10}{H}$ et $\frac{0,10i}{H}$ pour 1, d'en faire la comparaison avec les courbes de cette figure ou avec les courbes intercalées répondant aux mêmes grandeurs de t, r et $\frac{\alpha U^2}{gH}$.

Comme le fond des cours d'eau est toujours plus ou moins irrégulier, il conviendra d'essayer plusieurs manières de prendre le fond en pente uniforme i qu'on lui substituera, pente dont on déduira ordinairement H par la formule $\frac{\omega}{\chi} i = c \left(\frac{Q}{\omega}\right)^m$ ou par la table équivalente de l'article 14 au moyen du débit Q préalablement jaugé.

Ce travail de comparaison rationnelle des résultats de l'observation aux résultats de l'intégration numérique de l'équation du mouvement permanent sera bien plus utile, à notre avis, que de nouvelles recherches d'équations propres à représenter empiriquement en y, y_0 et $s - s_0$ ou s, la courbe du remous des barrages. Tout le monde regardera comme prouvé, on le pense (et cela quelque opinion que l'on ait sur les petites modifications dont serait susceptible l'équation (46) du mouvement des eaux) que cette courbe indéfinie à deux asymptotes est constamment la même pour un même cours d'eau prismatique débitant

une quantité d'eau déterminée, et que les hauteurs plus ou moins grandes des barrages n'ont pour effet que d'en retrancher une portion plus ou moins grande vers l'aval; mais que cette courbe doit varier avec les éléments $\frac{\alpha U^2}{gH}$, $r = \frac{H}{l + Ht}$ et t de chaque cours d'eau. D'où il suit que toute équation en y, y_0 et s qui représente, sur un cours d'eau, un remous produit par un barrage d'une certaine hauteur est, par cela seul, inhabile à représenter, sur le même cours d'eau, un remous produit par un barrage d'une hauteur y_0 différente, et que toute équation où n'entrent pas les trois rapports ou éléments dont nous venons de parler ne peut être applicable qu'à des valeurs particulières de ces rapports, et ne pourrait servir pour d'autres valeurs.

C'est donc à des tables comme celles dont M. Dupuit a donné le premier spécimen, et où le point initial du remous vers l'aval peut être placé où l'on veut, ou bien à des courbes comme celles de l'art. 42 dont on peut prendre à volonté une portion variable, et non à des équations comme celles proposées par divers ingénieurs, qu'il faut demander les solutions expéditives du problème important qui nous occupe.

Il est bien entendu au reste que dans les cours d'eau où les largeurs, les profondeurs et les pentes de fond sont très-variables d'un point à l'autre, il faut recourir aux solutions lentes, mais assortissables à tous les cas, qui sont déduites de l'application directe de l'équation générale du mouvement permanent, à la détermination de l'écoulement à travers une série de sections connues au moyen

de profils en travers suffisamment rapprochés (art. 33). Et encore cette méthode ne suffit-elle plus lorsque la section et les pentes varient rapidement et lorsque le lit offre beaucoup de sinuosités. Alors les courbures horizontales et verticales des filets développent des forces centrifuges qui doivent, ainsi que la distribution variable des vitesses, influer sensiblement sur les résultats, et il devient nécessaire de rendre le calcul encore plus composé. Ce sera l'objet d'un autre mémoire, où l'on donnera aussi des tables pour le cas de l'abaissement des eaux au-dessous du niveau du régime uniforme ainsi que pour le cas d'une contre-pente au fond, et où, après avoir tiré le parti qu'on pourra des connaissances actuelles, on proposera, ainsi qu'on l'a dit à l'art. 14 ci-dessus, des recherches expérimentales spéciales dans une direction propre à fournir des bases plus sûres à un pareil calcul.

Ce qui précède suffira tout au moins, on le pense, pour montrer l'avantage qu'on peut tirer de la formule à second membre monôme et à exposant fractionnaire pour résoudre expéditivement le plus grand nombre des problèmes sur les eaux courantes, sans sacrifier l'exactitude en ce qui regarde les canaux (art. 1, 2, 14) et en l'obtenant pour les tuyaux, ce qui était impossible avec la formule à second membre binôme (art. 15, 20).

Suivent les tables (annoncées à l'art. 30) des deux facteurs de l'expression (40) $D = \frac{0,2396687}{J^{7/31}} \cdot Q^{12/31}$ du diamètre du tuyau débitant le volume Q sous la pente J.

Valeurs du premier facteur de l'expression

$$D = \left[\frac{4c\left(\frac{4}{\pi}\right)^m}{J}\right]^{\frac{1}{2m+1}} . Q^{\frac{m}{2m+1}}, \quad \text{ou} \quad D = \frac{0,2396687}{J^{7/31}} . Q^{\frac{12}{31}}$$

du diamètre du tuyau capable du débit Q *mètres cubes par seconde sous la* pente fictive J *par mètre courant.*

Pente J.	1er facteur.	Différences.	Pente J.	1er facteur.	Différences.	Observation.
0,000 010	3,2258	686	0,000 10	1,9179	408	Pour une valeur de J, qui serait 10 fois plus petite qu'une de celles de la table ; on multiplierait la valeur correspondante du facteur par $10^{7/31} = 1,681924$.
11	3,1572	615	11	1,8771	365	
12	3,0957	554	12	1,8406	330	
13	3,0403	505	13	1,8076	300	
14	2,9898	462	14	1,7776	275	
15	2,9436	426	15	1,7501	253	
16	2,9010	394	16	1,7248	234	
17	2,8616	367	17	1,7014	218	
18	2,8249	343	18	1,6796	204	
19	2,7906	321	19	1,6592	191	
0,000 020	2,7585	303	0,000 20	1,6401	180	
21	2,7282	285	21	1,6221	169	
22	2,6997	269	22	1,6052	161	
23	2,6728	256	23	1,5891	152	
24	2,6472	243	24	1,5739	144	
25	2,6229	231	25	1,5595	138	
26	2,5998	221	26	1,5457	131	
27	2,5777	210	27	1,5326	125	
28	2,5567	202	28	1,5201	120	
29	2,5365	194	29	1,5081	115	
0,000 030	2,5171	185	0,000 30	1,4966	111	
31	2,4986	179	31	1,4855	106	
32	2,4807	172	32	1,4749	102	
33	2,4635	165	33	1,4647	98	
34	2,4470	160	34	1,4549	95	
35	2,4310	154	35	1,4454	92	
36	2,4156	149	36	1,4362	88	
37	2,4007	144	37	1,4274	86	
38	2,3863	140	38	1,4188	83	
39	2,3723	135	39	1,4105	80	
0,000 040	2,3588	131	0,000 40	1,4025	78	
41	2,3457	127	41	1,3947	76	
42	2,3330	124	42	1,3871	74	
43	2,3206	120	43	1,3797	71	
44	2,3086	117	44	1,3726	70	
45	2,2969	114	45	1,3656	67	
46	2,2855	110	46	1,3589	66	
47	2,2745	108	47	1,3523	64	
48	2,2637	105	48	1,3459	63	
49	2,2532	103	49	1,3396	61	
0,000 050	2,2429	477	0,000 50	1,3335	284	
55	2,1952	428	55	1,3051	253	
60	2,1524	385	60	1,2798	230	
65	2,1139	351	65	1,2568	208	
70	2,0788	321	70	1,2360	191	
75	2,0467	296	75	1,2169	176	
80	2,0171	275	80	1,1993	163	
85	1,9896	255	85	1,1830	152	
90	1,9641	238	90	1,1678	142	
95	1,9403	224	95	1,1536	133	
0,000 100	1,9179		0,001 00	1,1403		

Suite des valeurs du 1er facteur $0{,}2396687\,J^{-\frac{7}{31}}$.

Pente J.	1er facteur.	Différences.	Pente J.	1er facteur.	Différences.	Observation.
0,001 0	1,1403	243	0,020	0,5798	64	Pour une valeur de J 10 fois plus grande qu'une de celles de la table, on multiplierait la valeur correspondante du facteur par $\left(\frac{1}{10}\right)^{7/31} = 0{,}594557$.
1 1	1,1160	217	21	0,5734	60	
1 2	1,0943	196	22	0,5674	56	
1 3	1,0747	178	23	0,5618	54	
1 4	1,0569	163	24	0,5564	51	
1 5	1,0406	151	25	0,5513	49	
1 6	1,0255	139	26	0,5464	46	
1 7	1,0116	130	27	0,5418	45	
1 8	0,9986	121	28	0,5373	42	
1 9	0,9865	114	29	0,5331	41	
0,002 0	0,9751	107	0,030	0,5290	39	
2 1	0,9644	100	31	0,5251	37	
2 2	0,9544	96	32	0,5214	36	
2 3	0,9448	90	33	0,5178	35	
2 4	0,9358	86	34	0,5143	34	
2 5	0,9272	82	35	0,5109	32	
2 6	0,9190	78	36	0,5077	31	
2 7	0,9112	74	37	0,5046	31	
2 8	0,9038	72	38	0,5015	29	
2 9	0,8966	68	39	0,4986	28	
0,003 0	0,8898	66	0,040	0,4958	28	
3 1	0,8832	63	41	0,4930	27	
3 2	0,8769	60	42	0,4903	26	
3 3	0,8709	59	43	0,4877	25	
3 4	0,8650	56	44	0,4852	24	
3 5	0,8594	55	45	0,4828	24	
3 6	0,8539	53	46	0,4804	24	
3 7	0,8486	51	47	0,4780	22	
3 8	0,8435	49	48	0,4758	22	
3 9	0,8386	48	49	0,4736	22	
0,004 0	0,8338	46	0,050	0,4714	100	
4 1	0,8292	45	55	0,4614	90	
4 2	0,8247	44	60	0,4524	81	
4 3	0,8203	42	65	0,4443	74	
4 4	0,8161	41	70	0,4369	67	
4 5	0,8120	41	75	0,4302	63	
4 6	0,8079	39	80	0,4239	57	
4 7	0,8040	38	85	0,4182	54	
4 8	0,8002	37	90	0,4128	50	
4 9	0,7965	36	95	0,4078	47	
0,005 0	0,7929	169	0,100	0,4031	86	
5 5	0,7760	151	0,11	0,3945	77	
6 0	0,7609	136	0,12	0,3868	69	
6 5	0,7473	124	0,13	0,3799	63	
7 0	0,7349	114	0,14	0,3736	58	
7 5	0,7235	105	0,15	0,3678	53	
8 0	0,7130	97	0,16	0,3625	49	
8 5	0,7033	90	0,17	0,3576	46	
9 0	0,6943	84	0,18	0,3530	43	
9 5	0,6859	79	0,19	0,3487	40	
0,010 0	0,6780	144	0,20	0,3447	38	
0,011	0,6636	130	0,21	0,3409	35	
12	0,6506	116	0,22	0,3374	34	
13	0,6390	106	0,23	0,3340	32	
14	0,6284	97	0,24	0,3308	30	
15	0,6187	90	0,25	0,3278	29	
16	0,6097	83	0,26	0,3249	28	
17	0,6014	77	0,27	0,3221	26	
18	0,5937	72	0,28	0,3195	25	
19	0,5865	67	0,29	0,3170	25	
0,020	0,5798		0,30	0,3145		

Valeurs du 2e facteur $Q^{\frac{m}{2m+1}} = Q^{\frac{12}{31}}$.

(Multiplier par mille les valeurs du débit Q en mètres cubes pour avoir le débit en litres 1000Q.)

Débit Q en mètres cubes.	Facteur $Q^{\frac{12}{31}}$.	Différences.	Débit Q en mètres cubes.	Facteur $Q^{\frac{12}{31}}$.	Différences.	Observation.
0,000 10	0,02829	106	0,001 0	0,0690	26	Pour une valeur de Q dix fois plus petite qu'une de celles de la table, on multiplierait la valeur correspondante du facteur $Q^{12/31}$ par $\left(\frac{1}{10}\right)^{12/31} = 0,4101130$.
11	0,02935	101	1 1	0,0716	24	
12	0,03036	95	1 2	0,0740	24	
13	0,03131	91	1 3	0,0764	22	
14	0,03222	87	1 4	0,0786	21	
15	0,03309	84	1 5	0,0807	20	
16	0,03393	81	1 6	0,0827	20	
17	0,03474	77	1 7	0,0847	19	
18	0,03551	75	1 8	0,0866	18	
19	0,03626	73	1 9	0,0884	18	
0,000 20	0,03699	71	0,002 0	0,0902	17	
21	0,03770	69	2 1	0,0919	17	
22	0,03839	66	2 2	0,0936	16	
23	0,03905	65	2 3	0,0952	16	
24	0,03970	63	2 4	0,0968	15	
25	0,04033	62	2 5	0,0983	15	
26	0,04095	60	2 6	0,0998	15	
27	0,04155	59	2 7	0,1013	15	
28	0,04214	58	2 8	0,1028	14	
29	0,04272	56	2 7	0,1042	13	
0,000 30	0,04328	55	0,003 0	0,1055	14	
31	0,04383	55	3 1	0,1069	13	
32	0,04438	53	3 2	0,1082	13	
33	0,04491	52	3 3	0,1095	13	
34	0,04543	51	3 4	0,1108	12	
35	0,04594	51	3 5	0,1120	13	
36	0,04645	49	3 6	0,1133	12	
37	0,04694	49	3 7	0,1145	11	
38	0,04743	48	3 8	0,1156	12	
39	0,04791	47	3 9	0,1168	12	
0,000 40	0,04838	46	0,004 0	0,1180	11	
41	0,04884	46	4 1	0,1191	11	
42	0,04930	45	4 2	0,1202	11	
43	0,01975	45	4 3	0,1213	11	
44	0,05020	44	4 4	0,1224	11	
45	0,05064	43	4 5	0,1235	10	
46	0,05107	43	4 6	0,1245	11	
47	0,05150	42	4 7	0,1256	10	
48	0,05192	41	4 8	0,1266	10	
49	0,05233	42	4 9	0,1276	10	
0,000 50	0,05275	198	0,005 0	0,1286	48	
55	0,05473	187	5 5	0,1334	46	
60	0,05660	178	6 0	0,1380	44	
65	0,05838	170	6 5	0,1424	41	
70	0,06008	163	7 0	0,1465	40	
75	0,06171	156	7 5	0,1505	38	
80	0,06327	150	8 0	0,1543	36	
85	0,06477	145	8 5	0,1579	36	
90	0,06622	140	9 0	0,1615	34	
95	0,06762	136	9 5	0,1649	33	
0,001 00	0,06898		0,010 0	0,1682		

Suite des valeurs du 2e facteur $Q^{\frac{12}{31}}$.

Débit Q en mètres cubes.	Facteur $Q^{\frac{12}{31}}$.	Différences.	Débit Q en mètres cubes.	Facteur $Q^{\frac{12}{31}}$.	Différences.	Observation.
0,010	0,1682	63	0,10	0,4101	154	Pour une valeur Q dix fois plus grande qu'une de celles de la table, on multiplierait la valeur correspondante du facteur $Q^{12/31}$ par $(10)^{12/31} = 2,43354$.
0,011	0,1745	60	0,11	0,4255	146	
0,012	0,1805	57	0,12	0,4401	139	
0,013	0,1862	54	0,13	0,4540	132	
0,014	0,1916	52	0,14	0,4672	126	
0,015	0,1968	50	0,15	0,4798	121	
0,016	0,2018	48	0,16	0,4919	117	
0,017	0,2066	46	0,17	0,5036	113	
0,018	0,2112	44	0,18	0,5149	109	
0,019	0,2156	43	0,19	0,5258	105	
0,020	0,2199	42	0,20	0,5363	103	
0,021	0,2241	41	0,21	0,5466	99	
0,022	0,2282	40	0,22	0,5565	96	
0,023	0,2322	38	0,23	0,5661	94	
0,024	0,2360	38	0,24	0,5755	92	
0,025	0,2398	37	0,25	0,5847	90	
0,026	0,2435	35	0,26	0,5937	87	
0,027	0,2470	35	0,27	0,6024	85	
0,028	0,2505	35	0,28	0,6109	84	
0,029	0,2540	33	0,29	0,6193	82	
0,030	0,2573	33	0,30	0,6275	80	
0,031	0,2606	32	0,31	0,6355	79	
0,032	0,2638	32	0,32	0,6434	77	
0,033	0,2670	31	0,33	0,6511	75	
0,034	0,2701	31	0,34	0,6586	75	
0,035	0,2732	29	0,35	0,6661	73	
0,036	0,2761	30	0,36	0,6734	71	
0,037	0,2791	29	0,37	0,6805	71	
0,038	0,2820	28	0,38	0,6876	69	
0,039	0,2848	28	0,39	0,6945	69	
0,040	0,2376	28	0,40	0,7014	67	
0,041	0,2904	27	0,41	0,7081	67	
0,042	0,2931	27	0,42	0,7148	65	
0,043	0,2958	27	0,43	0,7213	64	
0,044	0,2985	26	0,44	0,7277	64	
0,045	0,3011	25	0,45	0,7341	63	
0,046	0,3036	26	0,46	0,7404	62	
0,047	0,3062	25	0,47	0,7466	61	
0,048	0,3087	25	0,48	0,7527	60	
0,049	0,3112	24	0,49	0,7587	60	
0,050	0,3136	118	0,50	0,7647	287	
0,055	0,3254	111	0,55	0,7934	272	
0,060	0,3365	106	0,60	0,8206	258	
0,065	0,3471	101	0,65	0,8464	246	
0,070	0,3572	97	0,70	0,8710	236	
0,075	0,3669	93	0,75	0,8946	226	
0,080	0,3762	89	0,80	0,9172	218	
0,085	0,3851	86	0,85	0,9390	210	
0,090	0,3937	83	0,90	0,9600	203	
0,095	0,4020	81	0,95	0,9803	197	
0,100	0,4101		1,00	1,0000		

N. B. On n'appliquera pas ces deux tables aux systèmes des valeurs de J et de Q qui donneraient la vitesse moyenne de l'eau $U = \frac{Q}{1/4\,\pi D^2} = 1,27324 \frac{Q}{D^2}$ plus petite que $0^m,04$ ou plus grande que 3.

TABLE DES MATIÈRES.

FAUTES A CORRIGER.

Page 50, 1re colonne de différences, vers le bas : 359, *lisez :* 358.
— 80, 1re *idem* vers le milieu : 145, *lisez :* 146.
— 81, 1re *idem* vers le haut : 431, *lisez :* 430.
— 82, 2e *idem* vers le milieu : le 2e 102, *lisez :* 101.
— 95, 1re colonne Q, vers le bas : 0,3069, *lisez :* 0,5069.
— 142, supprimer la note (l'erreur qu'elle désigne est corrigée).
— 145, 2e colonne de différences, au haut : 43, *lisez :* 45.
— 146, 2e colonne, vis-à-vis 0,030 de la 1re : 4,0463, *lisez :* 4,0465.
— 146, 5e colonne de différences : 209 (entre 184 et 215), *lisez :* 199.
— 147, 6e colonne de chiffres, vis-à-vis 0,42 de la 1re : 0,554, *lisez :* 0,654.
— 148, 4e colonne de différences : 143 (entre 137 et 154), *lisez :* 145.

ON TROUVE

CHEZ CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT :

SAINT-VENANT (DE), *ingénieur en chef des ponts et chaussées.* Tableau des **Formules** de la théorie **des courbes** dans l'espace, in-4. 1 fr.

— Mémoires sur la **résistance des solides**, in-4. 1 fr. 50 c.

— Mémoire sur la question de savoir s'il existe des **masses continues**, et sur la nature probable des dernières particules des corps, in-8. 60 c.

— Mémoires sur la dérivation des eaux pluviales, in-8 avec pl. 1 fr. 25 c.

— De la conservation et de l'assainissement des **étangs**, in-8 avec pl., 1850. 1 fr. 25 c.

— Du drainage des terres, in-8. 60 c.

— Principes de **mécanique** fondés sur la cinématique, in-4, 1851. 3 fr. 50 c.

— Tables hydrauliques et méthodes graphiques pour les problèmes sur les eaux courantes, in-8 1852. 1 fr. 50 c.

CLAUDEL (J.), *ingénieur civil.* **Formules, Tables et renseignements pratiques,** à l'usage des ingénieurs, des architectes, des industriels et de tous les constructeurs; ouvrage divisé en six parties comme il suit : —1re PARTIE. Principes fondamentaux de la dynamique : leur application aux diverses machines mues par des moteurs naturels, animés et inanimés, conduites d'eau, résistance des matériaux ; — 2e PARTIE. Chaleur appliquée à l'industrie ; — 3e PARTIE. Machines à vapeur, bateaux à vapeur ; — 4e PARTIE. Chemins de fer, locomotives ; 5e PARTIE. Architecture ; — 6e PARTIE. Routes, ponts, canaux. *Supplément.* **2e édition,** revue et augmentée. 1 fort vol. in-8, avec figures et pl. 12 fr. 50 c.

— **Introduction** théorique et pratique **à la science de l'ingénieur.** 1 v. in-8, avec 223 figures dans le texte. 9 fr.

— **Table** des **carrés** et des **cubes** des nombres entiers successifs de 1 à 10,000; des **longueurs des circonférences** et des **surfaces des cercles** dont les diamètres sont exprimés par les nombres entiers de 1 à 1000; des **expressions trigonométriques naturelles** des angles successifs de minute en minute, avec un **nouveau texte** explicatif pour l'usage de ces tables. In-8. Paris, 1850. 3 fr. 50 c.

CORIOLIS, *de l'Institut, ingén. en chef des p. et ch.* **Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines,** ou Considérat. sur l'emp. des moteurs et sur leur évaluation, pour servir d'introd. à l'étude spéciale des machines; 2e édit., in-4, avec pl. 15 fr.

— **Théorie mathématique des effets du jeu de billard,** 1 vol. gr. in-8 avec planches. 6 fr. 50 c.

DUPUIT, *ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées.* **Études** théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes, suivies des considérations relatives au régime des eaux, au débouché à leur donner, et à la marche des alluvions dans les rivières à fond mobile. 1 vol. in-8. 1848. 7 fr.

GAUBERT, *capitaine du génie, ancien élève de l'École polytechnique, etc.* **Traité de Mécanique** à l'usage des élèves des Écoles polytechnique et normale, et des aspirants à ces écoles. 1 vol. in-8, avec pl. 8 fr.

— **Essai sur la détermination des Centres de gravité,** suivi de notes sur la multiplication des nombres, la pyramide triangulaire, le binôme de Newton, la règle de Descartes, les lignes du 2e degré, les sections coniques, la division d'un angle en parties égales, la composition des forces, le problème général des distances, etc. 2e édit., in-8. 4 fr.

GIRARD, *ingénieur en chef des ponts et chaussées, de l'Institut de France, de celui d'Égypte, etc., etc.* **Traité de la résistance des solides et des** solides d'égale résistance. 1 vol. in-4, avec planches. 15 fr.

HACHETTE, *membre de l'Institut, ancien professeur à l'École polytechnique.* **Traité élémentaire des Machines**. 1 vol. in-4, avec 35 grandes pl., 4e édition, revue et augmentée, 1828. 25 fr.

Après avoir exposé, dans le premier chapitre, les principes généraux qui servent de base à la construction des machines et à la comparaison de leurs effets, l'auteur a développé dans le second la THÉORIE DES ENGRENAGES (application si importante de la géométrie descriptive), comprenant les cames, les crémaillères, les roues et lanternes à fuseaux cylindriques et coniques, enfin les roues qui tournent autour de deux axes parallèles ou inclinés, etc.; le troisième chapitre donne la description des principales machines employées dans les constructions, telles que les nœuds, poulies, treuils, grues, sonnettes, machines à molettes, chapelets, machines à recéper les pieux, à curer les ports, etc. Les planches qui accompagnent cette description ont été dessinées avec le plus grand soin par M. Girard; elles sont au nombre de 35, dont l'une donne le tableau des machines élémentaires divisées en dix séries, et d'autres les diverses roues hydrauliques, presses, pompes, machines à vapeur, le bélier hydraulique, divers dynamomètres, roues et frein dynamométrique, aile de moulin à vent, machines à colonne d'eau, etc., etc. 7 planches sont relatives aux engrenages.

LEBAS, *ingénieur de la marine.* **L'obélisque de Luxor**, histoire de sa translation à Paris, description des travaux auxquels il a donné lieu, avec un appendice sur les calculs des appareils d'abatage, d'embarquement, de hallage et d'érection; détails pris sur les lieux et relatifs au sol, aux sciences, aux mœurs et aux usages de l'Egypte ancienne et moderne, suivi d'un extrait de l'ouvrage de Fontana sur la translation de l'obélisque du Vatican. 1 vol. grand in-4, jésus, accompagné de 16 planches, dont 4 sur demi-grand aigle. 25 fr.

MELLET, *ingénieur, ancien élève de l'Ecole polytechnique, directeur du chemin de fer de la Loire, et* **TOURASSE**, *ingénieur-mécanicien, breveté pour plusieurs systèmes de bateaux à vapeur.* **Essai sur les Bateaux à vapeur**, appliqué à la navigation intérieure et maritime de l'Europe, sur les bateaux aqua-moteurs, et particulièrement sur le touage par la vapeur, ou remorques à points fixes, accompagné de considérations sur les transports par terre, par eau, et chemins de fer. 1 v. in-4. 10 fr.

MORIN (Arthur), *membre de l'Institut, professeur de mécanique au Conservatoire des arts et métiers de Paris.* Nouvelles expériences faites à Metz en 1834 sur **l'adhérence des pierres et des briques** posées en bain de mortier ou scellées en plâtre; sur le **frottement des axes de rotation**, la variation de **tension des courroies** ou cordes sans fin employées à la transmission du mouvement, et sur le frottement des courroies à la surface des tambours; suivies de tableaux donnant le résumé et le résultat de toutes les autres expériences sur le frottement, exécutées par l'auteur en 1831, 1832 et 1833, et publiées par ordre de l'Académie des sciences. 1 vol. in-4, avec pl. 1838. 7 fr.

REECH (F.), *ingénieur, directeur de l'Ecole d'application du génie maritime*, etc. **Cours de mécanique** d'après la **nature généralement flexible et élastique des corps**, comprenant la statique et la dynamique avec la théorie des vitesses virtuelles, celle des forces vives et celle des forces de réaction, la théorie des mouvements relatifs et le théorème de Newton sur la similitude des mouvements. 1 vol. in-4. Paris, 1852. 12 fr.

ROLLET (Augustin), *directeur des subsistances de la marine, officier de la légion d'honneur.* **Mémoire sur la Meunerie, la Boulangerie et la conservation des grains et des farines**, contenant la description des procédés, machines et appareils appliqués jusqu'à ce jour au nettoyage, à la conservation et à la mouture des blés, à la fabrication du pain et à celle du biscuit de mer, en France, en Angleterre, en Irlande, en Belgique, en Hollande, etc., précédé de considérations sur le commerce des blés en Europe; publié sous les auspices de M. le ministre de la marine et des colonies. 1 fort vol. in-4, avec 15 pl., accompagné d'un magnifique atlas de 62 pl. in-fol. demi-colombier. 90 fr.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce, rue Racine, 26, près de l'Odéon.

ES NOUVELLES E AUX EAUX COURANTES. Pl. II.

0,80 · 0,90; U=1,00 U=2,00 2,10 2,20 2,30

...nts des
... l'eau

90
91
89
U
0,000,365,543 U
0,0004 U
0,00040 102
$U^{\frac{10}{11}}$

nd l par la

Lemaitre sc.